

Eduardo Vairolatti Del Negro Fonseca

Comparação entre simulações pelo Movimento Geométrico Browniano e Movimento de Reversão à Média no cálculo do Fluxo de Caixa *at Risk* do departamento de *downstream* de uma empresa de petróleo.

Dissertação de Mestrado

Orientador: Eduardo Saliby, Ph. D.

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto COPPEAD de Administração

Março de 2006

Comparação entre simulações pelo Movimento
Geométrico Browniano e Movimento de Reversão à Média
no cálculo do Fluxo de Caixa at Risk do departamento de
downstream de uma empresa de petróleo

Eduardo Vairiolatti Del Negro Fonseca

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Instituto COPPEAD de Administração da
Universidade Federal do Rio de Janeiro –
UFRJ, como parte dos requisitos necessários à
obtenção do título de Mestre.

Rio de Janeiro, 31 de Março de 2006

Aprovada por:

Eduardo Saliby, Ph.D – Orientador
(COPPEAD/UFRJ)

André Luiz Carvalho da Silva, D.Sc.
(COPPEAD/UFRJ)

Gastão Coelho Gomes, D.Sc.
(IM/UFRJ)

Rio de Janeiro
Março de 2006

Fonseca, Eduardo Vairolatti Del Negro

Comparação entre simulações pelo Movimento Geométrico Browniano e Movimento de Reversão à Média no cálculo do Fluxo de Caixa at Risk do departamento de downstream de uma empresa de petróleo / Eduardo Vairolatti Del Negro Fonseca. Rio de Janeiro, 2005.

x, 72 f.

Dissertação (Mestrado em Administração) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto COPPEAD de Administração, 2006.

Orientador: Eduardo Saliby

1. Simulação de Monte Carlo. 2. Cash Flow-at-Risk. 3. Movimento de Reversão à Média. 4. Finanças – Teses.

I. Saliby, Eduardo. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Instituto COPPEAD de Administração. III. Título.

AGRADECIMENTOS

À minha família, pelo apoio e incentivo que sempre me deram.

À minha namorada e futura esposa, pela compreensão, paciência e suporte incondicional.

Ao meu orientador, Eduardo Saliby, pela confiança depositada e ajuda durante os momentos mais delicados para conclusão desse trabalho.

Aos amigos Fábio Coelho e Bruno Maletta, por seu tempo e preciosa colaboração.

A todos os amigos que fiz no COPPEAD.

RESUMO

FONSECA, Eduardo Vairolatti Del Negro. **Comparação entre simulações pelo Movimento Geométrico Browniano e Movimento de Reversão à Média no cálculo do Fluxo de Caixa at Risk do departamento de downstream de uma empresa de petróleo.** Orientador: Eduardo Saliby. Dissertação (Mestrado em Administração). Instituto COPPEAD de Administração, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2006.

O *Value at Risk* (VaR), amplamente divulgado e aplicado para empresas financeiras desde 1995, é um dos conceitos mais aceitos no gerenciamento de risco. Sua popularidade se dá, principalmente, pela simplicidade do conceito, sendo capaz de resumir posições de risco em um único valor. A partir de 1999 o conceito foi aplicado também a empresas não-financeiras, permitindo-as obter medidas de risco de mercado a partir das distribuições de probabilidade de seus resultados financeiros (lucro e /ou fluxo de caixa). Quando aplicado ao fluxo de caixa, ganha o nome de *Cash Flow at Risk* (CFaR). Fornece assim uma medida de risco para as empresas da necessidade de comprometimento de caixa para honrar compromissos futuros com terceiros, acionistas e disponibilidades para investimentos. Nesse contexto, uma empresa do setor petrolífero brasileiro contratou uma renomada consultoria internacional para moldar uma política de risco de mercado para seu segmento de *downstream*

O objetivo deste trabalho é comparar as implicações do uso de dois métodos de simulação diferentes, o Movimento de Reversão à Média de Orstein-Uhlenbeck e o Movimento Geométrico Browniano quando aplicados ao cálculo do CFaR da empresa em questão. O primeiro apresenta maior complexidade na estimação dos parâmetros de simulação, afim de criar um processo com propriedades mais aderentes à realidade econômica, quando comparado com o segundo. Em outras palavras, verificar se a inserção de parâmetros na simulação, de tal forma a levar em consideração as leis econômicas de oferta e demanda, realmente tem alguma relevância significativa na distribuição de frequência resultante, quando comparada com a distribuição de frequências resultante de um processo estocástico simples.

O fluxo de caixa foi modelado com receitas e custos baseados em 15 commodities internacionais, utilizando suas cotações durante o período de Janeiro de 1999 a Dezembro de 2004. A qualidade das metodologias foi mensurada pela análise exploratória e resumos estatísticos dos resultados gerados, desvio-padrão, teste-t emparelhado e correlação dos vetores de CFaRs resultantes. Os resultados indicam que existem diferenças significativas quanto ao modelo empregado, e que, apesar de complexa, é válida uma boa estimação dos parâmetros de entrada para o primeiro modelo. Porém, a escolha da metodologia de simulação mais adequada dependerá das características dos ativos que compõem o portfólio .

ABSTRACT

FONSECA, Eduardo Vairolatti Del Negro. **Comparação entre simulações pelo Movimento Geométrico Browniano e Movimento de Reversão à Média no cálculo do Fluxo de Caixa at Risk do departamento de downstream de uma empresa de petróleo.** Orientador: Eduardo Saliby. Dissertação (Mestrado em Administração). Instituto COPPEAD de Administração, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2006.

Value at Risk (VaR), broadly known and used by most of the financial institutions since 1995, is considered one of the most accepted risk management tools. Its popularity is mainly given by the simplicity of its concept, being capable of summarizing all risk positions in a single monetary value. Since 1999, this concept was also applicable to non-financial companies, allowing them to measure market risk positions from the probable distribution of their financial results (profits and/or cash flow). When used with cash flow distributions, it receives the name of *Cash Flow at Risk* (CFaR). This provides companies with a risk measurement of its future cash needs for third party and shareholders commitments as well as investment plans. In this context, a Brazilian oil company hired a renowned international consulting group to cast a risk management policy for its downstream segment.

This work intends to compare the implications of using two different simulation methods, the Ornstein-Uhlenbeck Mean Reverting Model and the Geometric Brownian Motion Model when applied to calculate the CFaR of this distinct company. The first Model have a higher complexity than the second, as for estimating the simulation input parameters, due to its nature of creating a more coherent model with the economic reality. In other words, it is intended to verify if the insertion of mean reverting parameters in the simulation, to take into account the economic laws of supply and demand, really brings any significant statistical relevancy to the resulting frequency distribution, when compared with the simplest of the stochastic processes.

The cash flow revenues and costs were modeled based on 15 international commodities, using their historical quotes from January 1999 to December 2004. The quality of the methods were measured by the generated results exploratory analysis and statistical summaries, and by the CFaR resulting vectors standard deviation, two paired sample t-test for means and correlation. The results point to significant differences as for the model used, and that, besides its complexity, a good input parameters estimation is valid and worthwhile for the first model. Nevertheless, the choice of the most adequate simulation method will depend upon the characteristics of the portfolio assets.

LISTA DE SIGLAS E ABREVIações

SMC	Simulação de Monte Carlo
MC	Monte Carlo
AAS	Amostragem Aleatória Simples
VaR	Value at Risk
CFaR	Fluxo de Caixa at Risk
EaR	Earnings at risk
EPSaR	Earnings per Share at Risk
MGB	Movimento Geométrico Browniano
MRM	Movimento de Reversão à Média
MI	Mercado Interno
ME	Mercado Externo
VA	Variável Aleatória
EWMA	Média Móvel Exponencial Ponderada
P/L	Preço/Lucro
ROE	Retorno sobre os Ativos

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Distribuição de probabilidades do retorno	9
Figura 2 – Alisamento Exponencial.....	12
Figura 3 – Distribuição de frequência do lucro de uma empresa hipotética.....	13
Tabela 1 - Obetivos e Procedimentos dos 5 passos do CorporateMetrics™	15
Tabela 2 - Resultados dos 5 passos do CorporateMetrics™	16
Tabela 3 - Risco de mercado em alguns componentes do lucro de uma empresa	21
Tabela 4 - Risco de mercado em alguns componentes do fluxo de caixa de uma empresa	21
Figura 4 - Distribuição de frequência do fluxo de caixa de uma empresa hipotética ..	23
Figura 5 - Risco absoluto e risco relativo à previsão	25
Figura 6 - Risco absoluto - fluxo de caixa com 95% de confiança.....	26
Figura 7 - Risco relativo - CFaR com 95% de confiança	26
Figura 8 - Simulação ilustrativa da trajetória de preços de uma commodity P	43
Tabela 5 - Relação de Commodities Simuladas	47
Tabela 6 - Correlações	49
Figura 9 - Diesel MI.....	52
Figura 10 - GLP MI	53
Figura 11 - OC MI	53
Figura 12 - Gasolina MI.....	54
Figura 13 - QAV MI	54
Figura 14 - Nafta MI	55
Figura 15 - Marlim ME.....	55
Figura 16 - Diesel ME.....	56
Figura 17 - GLP ME	56
Figura 18 - OC ME	57
Figura 19 - Gasolina ME.....	57
Figura 20 -QAV ME.....	58
Figura 21 - Nafta ME.....	58
Figura 22 - Brent ME.....	59
Figura 23 - Marine Fuel ME.....	59
Figura 24 - Média VOL ME x Média VOL MI	60
Tabela 7 - Estatísticas descritivas das séries de retornos das commodities	60

Tabela 8 - Resumos Estatísticos dos Fluxos de Caixa gerados das 30 corridas realizadas utilizando o Movimento Geométrico Browniano	62
Tabela 9 - Resumos Estatísticos dos Fluxos de Caixa gerados das 30 corridas realizadas utilizando o Movimento de Reversão à Média	63
Tabela 10 - Estatísticas descritivas das Médias das Médias dos Fluxos de Caixa gerados a partir das 30 corridas para cada método de simulação	63
Tabela 11 - Diferenças dos Fluxos de Caixa pelo MGB e MRM	64
Tabela 12 - Correlação entre as séries de Fluxos de Caixa e FCaR geradas por MGB e MRM	66

ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO	1
1.1 Apresentação do Tema	1
1.2 Questões a serem respondidas	4
2. Referencial Teórico	5
2.1 Gestão de Risco	5
2.2 <i>Value at Risk</i> (VaR) e suas metodologias de cálculo	6
2.2.1 VaR Histórico	8
2.2.2 VaR Paramétrico	8
2.3 Fluxo de Caixa <i>at Risk</i> (CFaR) e a Metodologia <i>CorporateMetrics™</i> ...	13
2.3.1 Especificação da Medida de Risco	17
2.3.1.1 <i>Earnings at Risk</i> (EaR).....	17
2.3.1.2 <i>Cash Flow at Risk</i> (CFaR)	18
2.3.2 Mapeamento de Exposições	20
2.3.3 Geração de Cenários de Taxa de Mercado.....	22
2.3.4 Avaliação e Cálculo do Risco.....	23
2.4 Modelos de Simulação	27
2.4.1 Processos Estocásticos e Movimento Geométrico Browniano.....	27
2.4.1.1 Lema de Itô	29
2.4.2 Amostragem Aleatória Simples (AAS).....	31
2.4.2.1 Geração de Variáveis Aleatórias Correlacionadas.....	33
2.4.3 Simulação de Monte Carlo	34
2.4.3.1 Descrição do Método de Monte Carlo	36
2.4.4 Simulação de MC utilizando-se o Movimento Geométrico Browniano.....	38
2.4.5 Simulação de MC utilizando-se o Movimento de Reversão à Média de Ornstein-Uhlenbeck.....	40
3. Metodologia	45
3.1 Tipo de pesquisa	45
3.2 Experimento realizado	46
3.3 Coleta de dados.....	48
3.4 Estimação de parâmetros	48
3.5 Tratamento dos dados	50
3.6 Limitações.....	50
3.6.1 Limitações Metodológicas.....	50
3.6.2 Limitações de <i>Hardware</i> e <i>Software</i>	50
4. Resultados	52
4.1 Análise Exploratória dos Dados	52
4.2 Análise das simulações de CFaR.....	61
5. Conclusões	67
6. Referências Bibliográficas	69

1. INTRODUÇÃO

1.1 Apresentação do Tema

A gestão de riscos no ambiente corporativo se expandiu rapidamente ao longo dos últimos anos. Esta expansão reflete um melhor entendimento dos benefícios de uma gestão de riscos bem estruturada, assim como uma maior disponibilidade de ferramentas e instrumentos financeiros para tal. Boa parte do material disponível sobre gestão de riscos no ambiente corporativo foca principalmente no uso de derivativos – futuros, *forwards*, *swaps* e opções – para se fazer *hedge* de exposições às flutuações das taxas de juros, taxas de câmbio e preços de commodities. Assim foi desenvolvida uma gama bastante ampla de metodologias e instrumentos de gestão destes riscos, que vêm sendo abordados de forma cada vez mais integrada pelas empresas.

Nesse contexto, Securato (2002) afirma que “no caso das empresas, também podemos pensar em condições de riscos em relação ao que pode ocorrer com as mesmas, em um intervalo de tempo futuro, distinto das situações esperadas. Desta forma uma empresa pode ser entendida como uma carteira de ativos e passivos que terão seus valores alterados ao longo do tempo e que apresentam variações em relação a seus valores esperados, em função das variações que ocorram na economia, do macro setor e do segmento específico em que a empresa se insere; o que deve ser entendido como o mercado da empresa.”

Buscando maneiras de gerir o risco de mercado de suas exposições, o setor empresarial passou a se interessar pelos princípios do *Value at Risk* (VaR), que foi inicialmente desenvolvido para a gestão de riscos em instituições financeiras, e como esses princípios poderiam ser adaptados para o ambiente corporativo.

A idéia de se mensurar o risco financeiro de uma carteira, decorrente das flutuações dos preços dos ativos financeiros, vem crescendo em importância nos últimos anos, principalmente após as recentes crises financeiras que geraram muita instabilidade nos mercados e perdas consideráveis.

Dentro dessa idéia, o conceito de VaR vem ganhando importância cada vez mais. Jorion (1997) o define como "um método de mensuração de risco de mercado que utiliza técnicas estatísticas, buscando medir a pior perda esperada de carteira, fundo ou instituição ao longo de determinado intervalo de tempo, sob condições normais de mercado e dentro de determinado nível de confiança".

Sabe-se que uma das grandes vantagens do VaR, e possível razão para sua popularidade, é a simplicidade do conceito. Sarno (2002) constata que "a grande motivação para o uso do VaR é a capacidade de integrar, em uma só medida numérica, o risco total de uma carteira de investimento, englobando ativos e passivos. Permite a comparação e agregação dos riscos envolvidos em diferentes mercados, facilitando o trabalho dos que têm que administrar e fixar limites de risco."

Em meados da década de 90, o banco americano JP Morgan tornou de domínio público o documento RiskMetrics™ – Technical Document (1995) divulgando sua metodologia interna de cálculo do VaR. O RiskMetrics™ tornou-se uma espécie de bíblia sagrada do gerenciamento de risco de mercado em todo o mundo para o setor financeiro. Mas o setor corporativo também demonstrava interesse crescente na aplicação dessa metodologia para cálculo, mensuração e gestão de sua exposição ao risco.

Quase cinco anos depois, com a ampla aceitação da metodologia do VaR, o banco JP Morgan mais uma vez disponibiliza um outro documento, intitulado CorporateMetrics™ – Technical Document (1999), que tornou pública suas definições e metodologias de cálculo do risco de mercado para empresas

não-financeiras. O CorporateMetrics™ permite às empresas obterem medidas de risco de mercado a partir das distribuições de probabilidade de seus resultados financeiros (lucro e /ou fluxo de caixa), geradas pela simulação de um grande número de cenários para as taxas de mercado que os influenciam, como as taxas de câmbio, taxas de juros e preços de commodities. Utiliza assim medidas de risco semelhantes ao Value at Risk, ou seja um valor expresso em unidades monetárias, que depende do nível de confiabilidade escolhido pela organização e de um horizonte de tempo.

Nesse contexto, uma empresa do setor petrolífero brasileiro contratou uma renomada consultoria internacional para moldar uma política de risco de mercado para seu segmento de *downstream*. Parte das receitas e custos desse segmento são suscetíveis às flutuações dos preços das commodities de energia no mercado internacional, justificando a preocupação da alta diretoria em mitigar o risco dos resultados futuros.

O resultado foi um modelo de risco que pretende, através da simulação de N cenários para cada uma das commodities identificadas como responsáveis por impactar o Fluxo de Caixa do segmento, traçar a mais provável – dado um nível de confiabilidade – distribuição de freqüências do Fluxo de Caixa Operacional desse segmento para 12 meses à frente; e conseqüentemente calcular o Fluxo de Caixa Operacional *at Risk* (CFaR).

A técnica adotada para gerar N cenários para cada commodity foi um processo de simulação com reversão à média. Este tipo de processo foi estudado por Dixit e Pindyck (1994) e também é conhecido como Processo Geométrico de Ornstein-Uhlenbeck ou Modelo de Dixit e Pindyck. Tem esse nome devido aos estudos de G.E. Uhlenbeck e L.S. Ornstein realizados em 1930, quando, segundo Strock (1993), os autores “introduziram esse processo numa tentativa de conciliar algumas das propriedades do Processo de Wiener com a realidade”, ou seja, uma tentativa de criar um processo com propriedades mais aderentes à realidade econômica, com as forças de

demanda e oferta agindo quando os preços se encontram distantes de um patamar de equilíbrio razoável.

1.2 Questões a serem respondidas

O uso do referido modelo de simulação proposto por Dixit e Pindyck (1994) aplicado ao cálculo do CFaR do segmento de *downstream* da cia. petrolífera brasileira apresenta alguma diferença estatística significativa em comparação com o mais simples dos modelos de simulação: o movimento geométrico browniano, caso aplicado para o mesmo cálculo?

Em outras palavras, a inserção de parâmetros na simulação, de tal forma à levar em consideração as leis econômicas de oferta e demanda, realmente tem alguma relevância significativa na distribuição de frequência resultante, quando comparada com a distribuição de frequências resultante de um processo estocástico simples?

2. Referencial Teórico

2.1 Gestão de Risco

A idéia de se mensurar o risco financeiro de uma carteira, decorrente das flutuações dos preços dos ativos financeiros, vem crescendo em importância nos últimos anos, principalmente após as recentes crises financeiras que geraram muita instabilidade nos mercados e perdas consideráveis.

Jorion (1997) argumenta que “o risco pode ser definido como a volatilidade de resultados inesperados, normalmente relacionada ao valor de ativos ou passivos”.

Existem três tipos de risco aos quais as empresas podem estar expostas:

- Operacional: está relacionado ao setor da economia em que a empresa opera, inovações tecnológicas, desenho de produtos, marketing, etc.
- Estratégico: resulta de mudanças fundamentais no cenário econômico e político (por exemplo, a expropriação ou nacionalização de territórios).
- Financeiro: ligado a possíveis perdas nos mercados devido a oscilações de variáveis financeiras (por exemplo, a taxa de juros, taxa de câmbio ou preços de commodities).

Este último pode ser classificado em:

- Riscos de mercado: surgem de mudanças nos preços de ativos ou passivos financeiros.
- Riscos de crédito: surgem do não cumprimento de obrigações contratuais
- Riscos de liquidez: surge quando uma transação não pode ser conduzida pelos preços de mercado, devido a uma atividade insuficiente de mercado. Também, pode referir-se à impossibilidade de cumprir obrigações relativas ao fluxo de caixa.

- Riscos operacionais: referem-se às perdas potenciais resultantes de sistemas inadequados, má administração, controles defeituosos ou falha humana na execução das operações da empresa.
- Riscos legais: surge quando uma contraparte não possui autoridade legal ou regulatória para se envolver em uma transação.

Este trabalho concentra-se no risco financeiro, mais especificamente no risco de mercado. O principal motivo para o surgimento da administração de risco é a volatilidade das variáveis financeiras. As opções, contratos futuros e outros tipos de derivativos existem em virtude da imprevisibilidade dos preços dos ativos em uma economia. Se estes fossem previsíveis, não haveria risco, não seria possível especular sobre os preços futuros e não haveria necessidade de proteção (hedge). As operações envolvendo derivativos existem fundamentalmente em função do caráter aleatório dos preços e retornos dos ativos. Curiosamente, conforme afirma Campbell, Lo e Mackinlay (1997), os alicerces da moderna teoria de finanças surgiram nas tentativas e esforços dos estudiosos de elaborar ferramentas para prever preços de ativos e “bater o mercado”.

2.2 Value at Risk (VaR) e suas metodologias de cálculo

Uma medida de mensuração e controle dos riscos de mercado bastante utilizada é o Value-at-Risk (VaR), definida como o valor máximo que pode ser perdido, com um certo nível de confiança, em um dado horizonte de tempo. É uma das ferramentas de gestão do risco de mercado que mais tem ganho importância no mercado financeiro. Isto se deve a ele representar, de maneira sucinta, o potencial de perda de uma carteira em função das possíveis oscilações de preços ou taxas de mercado.

As principais vantagens em se trabalhar com o Value at Risk (VaR) para medir o risco de mercado são:

- Fácil compreensão;
- O risco é medido em termos de potencial de perda;
- Relaciona a perda a uma probabilidade;
- Agrega em uma única medida o risco de várias posições de uma carteira.

Entretanto, apesar de ser um procedimento necessário, o VaR por si só não é suficiente para o controle de riscos, devendo ser complementado por limites e controles, além de uma função independente e centralizada de administração de risco. Pois representa uma estimativa técnica para o risco de mercado, tendo o mesmo valor de outras estimativas em outras áreas científicas.

O VaR é calculado de duas formas, uma para instrumentos financeiros sem opcionalidade (ditos lineares) e outra para instrumentos financeiros com opcionalidade (ditos não lineares).

Para o cálculo do VaR de instrumentos não lineares, como por exemplo as opções de compra ou venda de ações, a modelagem mais utilizada é a simulação de Monte Carlo. Para cada um dos fatores primitivos de risco, que descrevem em conjunto os riscos decorrentes destes instrumentos, são criados (utilizando a decomposição matricial de Cholesky) um grande número de cenários com distribuição normal e mesmos parâmetros estatísticos (volatilidade e correlação) estimados através da série histórica de retornos. Então, com modelos de precificação de instrumentos não lineares (Black & Scholes, Black e etc.) são calculados os possíveis retornos para cada cenário gerado. Como estes retornos não são associados à nenhuma distribuição estatística, o VaR é obtido através da determinação do percentil associado ao nível de confiabilidade escolhido. Retornaremos à simulação de Monte Carlo mais adiante.

Para instrumentos lineares, existem duas metodologias utilizadas, o VaR Histórico e o VaR Paramétrico.

2.2.1 VaR Histórico

O VaR histórico aplica as variações dos fatores de risco (fatores que afetam o valor de um determinado ativo do portfólio, por exemplo o preço de uma ação, a taxa de juros, o câmbio, etc.) ocorridas no passado nas posições de risco atuais levando em consideração o horizonte de tempo escolhido.

Define-se um período histórico e a unidade do holding period (diário, mensal, etc.) da qual deseja-se medir o VaR e calcula-se, para cada unidade de tempo, o retorno do portfólio atual, atualizando o valor de cada ativo. Dado um determinado nível de confiança $(1-a)\%$, o VaR será o percentil $a\%$ da amostra de retornos históricos. Por exemplo, o VaR de uma posição "comprada" em um determinado portfólio, por esta metodologia, com nível de confiança de 95% será o percentil 5% da amostra de retornos. Para uma posição de venda, o VaR será o percentil 95%.

As principais vantagens desta metodologia são a simplicidade e o não embasamento em premissas (como a distribuição de probabilidade dos retornos dos ativos), pois os dados são retirados diretamente do mercado financeiro. Além disso, consegue capturar o efeito de uma possível assimetria dos dados. Do lado das desvantagens, por se tratar de dados passados, é necessário acreditar que o futuro se comportará da mesma maneira que o período histórico analisado. Além disso, esta metodologia não permite a realização de análises de sensibilidade.

2.2.2 VaR Paramétrico

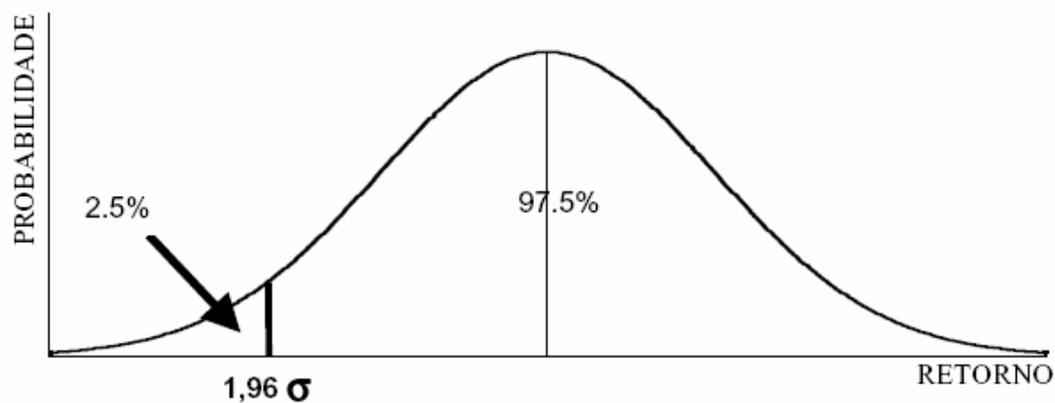
É o VaR calculado através da estimação de dois parâmetros que descrevem a distribuição estatística assumida para os retornos dos instrumentos: a média e a volatilidade. Para um determinado nível de confiabilidade escolhido pelo Comitê Executivo ou Comitê de Riscos da instituição financeira, 97,5% unicaudal por exemplo, e para distribuição estatística assumida (normal),

existe um número de desvios padrão (1,96 para os 97,5% de confiabilidade) que corresponde a um particular nível de retorno que neste caso só será superado em 2,5% das vezes, ou seja, não será superado em 97,5% das vezes (o nível de confiabilidade).

O número de dias onde a perda diária efetiva não deve superar o VaR, dividido pelo número total de dias em um determinado período nos dá o nível de confiabilidade associado ao VaR.

O VaR é um valor expresso em unidades monetárias, que depende do nível de confiabilidade e do horizonte de tempo. Por exemplo, é esperado que as perdas diárias superem o VaR de um dia com nível de confiabilidade de 97,5% em 2,5% (100% - 97,5%) dos dias. É esperado que perdas mensais superem o VaR de um mês com nível de confiabilidade de 95% em 5% dos meses.

A Figura 1 ilustra o conceito da distribuição de probabilidades do retorno para 1 dia de um ativo hipotético qualquer e seu VaR à 97,5% de confiabilidade.



Distribuição de Probabilidades do retorno do dia seguinte

Figura 1 - Distribuição de probabilidades do retorno

Obtém-se o VaR de um instrumento ao multiplicar aquele retorno pelo valor de sua posição (Valor Presente ou Mark to Market).

$$VaR = Posição * Volatilidade * Fator * \sqrt{Tempo}$$

$$\begin{aligned} VaR &= Posição * \sigma * 1,96 * 1 \\ VaR_j &= VP_j * \sigma_j * 1,96 \end{aligned} \quad (2.1)$$

A raiz do tempo na fórmula acima se deve ao fato da variância ser diretamente proporcional ao tempo; e como no cálculo do VaR utilizamos o desvio padrão (raiz quadrada da variância), dizemos que o VaR é proporcional à raiz quadrada do tempo.

Existem instrumentos (na verdade, a maioria deles o são) sensíveis a mais de um fator de risco, ou seja seus retornos são suscetíveis a variações de duas ou mais fontes de risco (ou também, fatores de risco). Estes instrumentos são então decompostos, tendo tantos VaRs calculados quantas forem suas fontes de risco. Esses VaRs são agregados, levando-se em consideração a correlação entre os retornos de cada fonte de risco. Finalmente, os VaRs de todos os instrumentos são agregados também levando-se em consideração a correlação entre eles:

$$VaR^2_{portfolio} = VaR^2_j + VaR^2_k + 2 \times correlação_{j,k} \times VaR_j \times VaR_k \quad (2.2)$$

Ou em notação Matricial:

$$\begin{aligned} VAR_{portfolio} &= \sqrt{[VAR_j \quad VAR_k] \times \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} VAR_j \\ VAR_k \end{bmatrix}} \\ VAR_{portfolio} &= \sqrt{\begin{bmatrix} p_j & p_k \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1.96^2 \times \sigma_j^2 & 1.96^2 \times \sigma_j \sigma_k \rho_{j,k} \\ 1.96^2 \times \sigma_j \sigma_k \rho_{j,k} & 1.96^2 \times \sigma_k^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} p_j \\ p_k \end{bmatrix}} \\ VAR_{portfolio} &= \sqrt{p' Q p} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Onde \mathbf{p} é o vetor dos valores presentes de todos os fatores de risco e \mathbf{Q} é a matriz de covariância multiplicada por 1.96^2 .

A metodologia do VaR paramétrico utiliza métodos estatísticos padronizados para calcular as variações do portfólio atual. Para isso, baseia-se em fortes premissas: o retorno dos ativos ou fatores de risco seguem uma distribuição estatística (geralmente utiliza-se a distribuição Normal), a variação dos ativos é linearmente proporcional à variação do portfólio, os retornos dos ativos são homocedásticos durante o horizonte de tempo e não há autocorrelação nas séries de retornos.

A estimativa da volatilidade utilizada na expressão analítica é, geralmente, retirada dos dados históricos. Uma forma simples é considerar a volatilidade como sendo o desvio-padrão dos retornos do portfólio. Porém, desta forma, todas as observações possuirão o mesmo peso, independentemente se ocorreram na véspera do cálculo ou no início do período analisado. Uma forma de capturar a dinâmica da volatilidade, dando maior peso para as observações mais recentes, é o alisamento exponencial (conhecido por EWMA). A previsão para a volatilidade em um instante qualquer é a média ponderada da previsão do instante anterior, usando um peso λ , e o quadrado do último retorno, com peso $1-\lambda$.

$$\sigma_t = \lambda\sigma_{t-1} + (1-\lambda)r_{t-1}^2 \quad (2.4)$$

O fator λ é chamado de fator de decaimento e deve ser menor que 1.

Ao utilizarmos um fator de decaimento de 0,91 por exemplo, atribuímos um peso de 0,09 (ou 9%) à informação mais recente, $0,09 \times (0,91)$ à penúltima observação, $0,09 \times (0,91)^2$ à antepenúltima observação e assim por diante, como demonstra a Figura 2 a seguir:

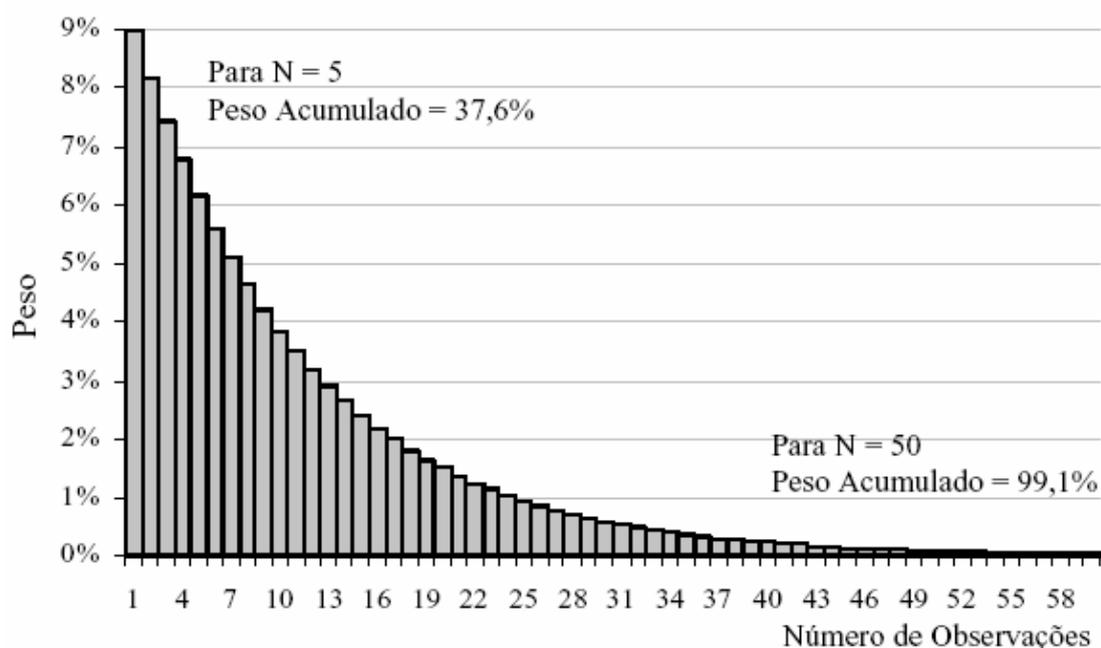


Figura 2 – Alisamento Exponencial

As maiores vantagens da utilização deste método frente ao método de janelas móveis são: grandes choques tendem a influir menos gradativamente na previsão, a última informação é a mais importante, não existe preocupação com tamanho da janela, permite a utilização de fórmula recorrente (não sendo necessário guardar um grande histórico de dados) e possibilita a determinação do λ que melhor se adapte às características do portfólio de cada instituição, determinando-o mediante maximização da função de verossimilhança. Na prática, o RiskMetrics utiliza o fator de 0,94 para todas as séries diárias como uma regra de bolso.

A principal vantagem do VaR paramétrico é a facilidade de implementação e a rapidez do cálculo, visto que o VaR é uma simples multiplicação. Porém, as premissas utilizadas nem sempre são constatadas na prática, principalmente a normalidade dos retornos dos ativos (LI, 1999). Sabe-se que os retornos extremos acontecem com mais frequência do que os previstos pela distribuição normal. Isso faz com que as estimativas de perda fiquem bastante imprecisas. Também, não é a metodologia indicada para portfólios

que contenham ativos não lineares, como os derivativos (a variação de preço dos derivativos não é proporcional à variação do preço do ativo-objeto).

2.3 Fluxo de Caixa *at Risk* (CFaR) e a Metodologia *CorporateMetrics*TM

*CorporateMetrics*TM – Technical Document (1999) é uma publicação do banco JP Morgan que, através do RiskMetrics Group, tornou pública suas definições e metodologias de cálculo do risco de mercado para empresas não-financeiras. O *CorporateMetrics*TM permite às empresas obterem medidas de risco de mercado a partir das distribuições de probabilidade de seus resultados financeiros (lucro e /ou fluxo de caixa), geradas pela simulação de um grande número de cenários para as taxas de mercado que os influenciam, como as taxas de câmbio, taxas de juros e preços de commodities.

O *CorporateMetrics*TM utiliza medidas de risco semelhantes ao Value at Risk, ou seja um valor expresso em unidades monetárias, que depende do nível de confiabilidade escolhido pela organização e de um horizonte de tempo. Este valor é obtido calculando-se o percentil da distribuição dos resultados financeiros simulados, como ilustrado na Figura 3 para o lucro de uma empresa hipotética.

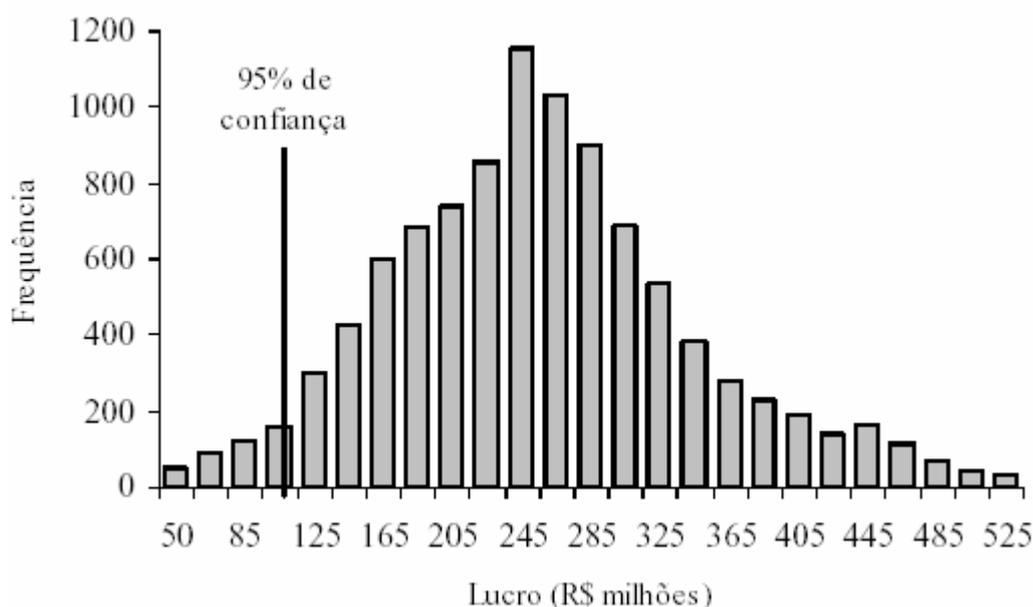


Figura 3 – Distribuição de frequência do lucro de uma empresa hipotética

Segundo La Rocque e Werlang (2003), “a hipótese básica do VaR é a de que as posições não mudam dentro do horizonte de investimento. No caso de um horizonte mais longo, esta hipótese básica de constância das posições torna-se absolutamente inverossímil e torna-se imprescindível a simulação de trajetórias de preço para avaliar a entrada e saída de caixa da empresa.”

O CorporateMetrics™ resume o procedimento de cálculo do risco de mercado em 5 passos:

1º Passo: Especificação da medida de risco

Especificar o resultado financeiro para o qual o risco de mercado será medido: freqüentemente, o lucro ou fluxo de caixa. Especificar o horizonte de tempo para o cálculo e o nível de confiança.

2º Passo: Mapeamento de exposições

Identificar todos os componentes do lucro ou fluxo de caixa sensíveis a variações nas taxas de mercado. Definir (matematicamente) como o valor de cada exposição é afetado por cada taxa de mercado.

3º Passo: Geração de cenários

Gerar um grande número de cenários que traduzam os possíveis valores para um dado conjunto de taxas de mercado ao longo do tempo.

a) Para cada horizonte de tempo definido no primeiro passo, especificar a distribuição de probabilidades das taxas de mercado identificadas no segundo passo.

b) Gerar N cenários colhendo amostras aleatórias de cada distribuição e plotar os valores em função do tempo.

Cada cenário define então, a trajetória da taxa de mercado ao longo de um horizonte de tempo especificado.

4º Passo: Avaliação

Calcular o futuro resultado financeiro para cada cenário de taxa de mercado através dos mapeamentos de exposição.

5º passo: Cálculo do risco

A partir da distribuição de freqüência dos resultados financeiros obtida no passo anterior, calcular as estatísticas de risco.

As Tabelas 1 e 2 resumem estes 5 passos e seus respectivos resultados:

PASSOS	OBJETIVOS	PROCEDIMENTO
1 - Especificação da medida de risco	Determinar qual medida de risco de mercado será utilizada.	Selecionar a medida de risco, o horizonte de tempo e o nível de confiança.
2 - Mapeamento de exposições	Expressar matematicamente como o resultado financeiro da empresa depende das taxas de mercado (variáveis aleatórias).	Caracterizar exposições isoladas através de equações ou expressões pró-forma.
3 - Geração de Cenários	Gerar um grande número de valores possíveis das taxas de mercado para cada horizonte de tempo.	Aplicar metodologias de previsão de longo prazo para gerar distribuições de taxas de mercado para cada horizonte de tempo desejado. Colhendo amostras destas distribuições, gerar N cenários, onde cada um destes é formado por uma taxa para cada prazo estudado.
4 - Avaliação	Calcular a distribuição dos resultados financeiros.	Para cada um dos N cenários, substituir nos mapeamentos de exposição as taxas simuladas no passo 3, calculando N resultados financeiros futuros, e plotar um histograma.
5 - Cálculo do risco	Calcular o risco de mercado	Através da distribuição dos resultados financeiros do passo 4, identificar o resultado correspondente ao nível de confiança desejado e comparar ao resultado previsto.

Tabela 1 - Objetivos e Procedimentos dos 5 passos do CorporateMetrics™

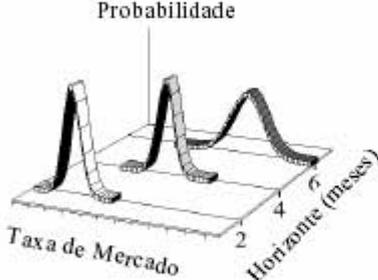
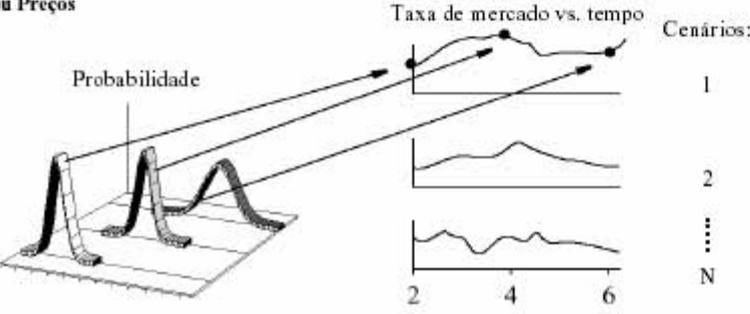
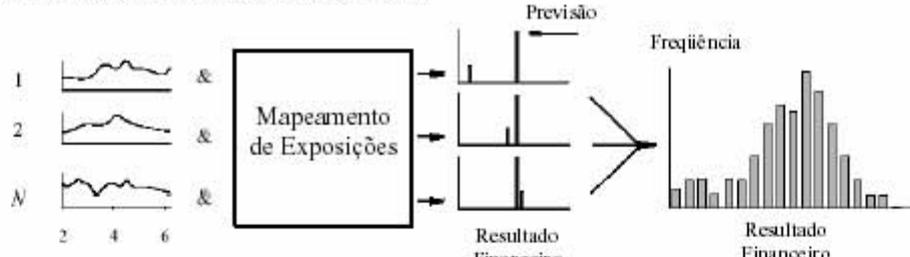
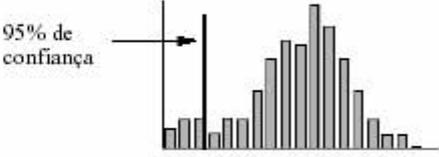
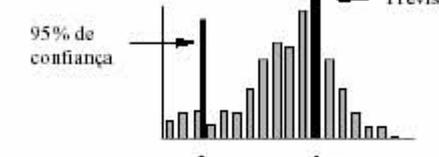
PASSOS	RESULTADO
1 - Especificação da medida de risco	<p>Medida de Riscos: EaR, CFaR, EPSaR, e/ou outras</p> <p>Horizonte de Tempo: Um ou mais períodos; tipicamente até 24 meses</p> <p>Nível de Confiança: 95%, por exemplo</p>
2 - Mapeamento de exposições	<p>Exemplo: Lucro no exterior = número de itens vendidos * preço unitário * taxa de câmbio</p>
3 - Geração de Cenários	<p>Exemplo: Distribuição da taxa de câmbio BRL/USD para 2, 4 e 6 meses.</p>  <p style="text-align: center;">Probabilidade</p> <p style="text-align: center;">Taxa de Mercado</p> <p style="text-align: center;">Horizonte (meses)</p>
	<p>N cenários de Taxas ou Preços</p>  <p style="text-align: center;">Taxa de mercado vs. tempo</p> <p style="text-align: center;">Cenários:</p> <p style="text-align: right;">1</p> <p style="text-align: right;">2</p> <p style="text-align: right;">⋮</p> <p style="text-align: right;">N</p>
4 - Avaliação	<p>Distribuição dos N resultados financeiros simulados</p>  <p style="text-align: center;">Previsão</p> <p style="text-align: center;">Mapeamento de Exposições</p> <p style="text-align: center;">Resultado Financeiro</p> <p style="text-align: center;">Resultado Financeiro</p> <p style="text-align: center;">Frequência</p>
5 - Cálculo do risco	<p>Medida de Risco de Mercado:</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <p>ABSOLUTO</p>  <p>95% de confiança</p> <p>Risco calculado</p> <p>Resultado Financeiro</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>RELATIVO À PREVISÃO</p>  <p>95% de confiança</p> <p>Previsão</p> <p>Risco calculado = B - A</p> <p>A B</p> </div> </div>

Tabela 2 - Resultados dos 5 passos do CorporateMetrics™

A seguir, serão detalhados cada um dos 5 passos para o cálculo do risco de mercado segundo o CorporateMetrics™:

2.3.1 Especificação da Medida de Risco

Dentre as várias medidas de performance financeira que são afetadas por variações nas taxas de mercado, o CorporateMetrics™ se concentra na avaliação do risco dos lucros e do fluxo de caixa por se tratarem de medidas largamente utilizadas pelas empresas para a avaliação de desempenho financeiro, liquidez (no caso do fluxo de caixa) e em modelos de precificação de companhias.

Em busca de uma linguagem comum para se falar sobre risco de mercado no ambiente corporativo, foram definidas duas medidas de risco: O *Earnings at Risk* e o *Cash Flow at Risk*.

2.3.1.1 Earnings at Risk (EaR)

Índices como o lucro por ação, preço/lucro (P/L), *Return on Equity* (ROE) e desconto de fluxos de lucros projetados são freqüentemente utilizados por analistas para determinar o valor das companhias. Portanto, ao gerenciar a variabilidade de seus lucros, as empresas podem controlar melhor o preço de mercado de suas ações e a riqueza de seus acionistas. Quando o lucro de uma companhia supera ou fica abaixo do esperado pelo mercado (ou do orçado pela própria companhia) o preço de suas ações se altera. Dada esta relação, as empresas precisam de uma metodologia que quantifique a sensibilidade do lucro aos seus fatores de risco.

Os processos de planejamento e orçamento que determinam níveis específicos de lucros para os próximos períodos (trimestres ou semestres) visando o crescimento no longo prazo podem ser capazes de identificar

possíveis perdas através de cenários pessimistas. Porém, estes processos não são capazes de levar em consideração as volatilidades e correlações de seus fatores de risco e ainda, não fornecem um nível de confiança (a probabilidade de ocorrer cada cenário) para as estimativas.

O CorporateMetrics™ definiu então, a seguinte medida para a variabilidade do lucro em relação ao risco de mercado:

Earnings at Risk (EaR) é a queda máxima do lucro, em relação a uma meta ou previsão específica, ocorrida devido ao impacto de variações das taxas de mercado em um dado conjunto de exposições, para um dado período e nível de confiança.

Tomando por exemplo, uma empresa que tenha previsto um lucro de R\$ 150 milhões para o próximo semestre e possui um EaR com 95% de confiança e horizonte de tempo de um semestre igual a R\$ 85 milhões; isto significa que esta empresa tem 95% de certeza que o lucro do próximo semestre não vai ficar abaixo do previsto por mais de R\$ 85 milhões devido ao impacto do risco de mercado.

Como alguns analistas preferem utilizar o lucro por ação, pode-se calcular também o *Earnings per Share at Risk* (EPSaR).

2.3.1.2 Cash Flow at Risk (CFaR)

O fluxo de caixa da empresa agrega as atividades operacionais, de investimento e de financiamento. Quando a empresa não consegue gerar caixa no montante suficiente e no período adequado, ela pode ser forçada a postergar investimentos, passar por um desequilíbrio financeiro ou até mesmo ir a bancarrota. Além disso, o fluxo de caixa fornece informações

sobre liquidez, rentabilidade e é bastante utilizado por analistas em modelos de precificação.

Para satisfazer a necessidade das companhias na quantificação do impacto do risco de mercado em seus fluxos de caixa, o CorporateMetrics™ definiu a seguinte medida para a variabilidade do fluxo de caixa:

Cash Flow at Risk (CFaR) é a queda máxima do valor do fluxo líquido de caixa gerado, em relação a uma meta ou previsão específica, ocorrida devido ao impacto de variações nas taxas de mercado em um dado conjunto de exposições, para um dado período e nível de confiança.

Tomando por exemplo, uma empresa que tenha previsto gerar R\$ 70 milhões de fluxo de caixa no próximo ano, e possui um CFaR com 95% de confiança e horizonte de tempo de um ano igual a R\$ 21 milhões; isto significa que a empresa tem 95% de certeza que sua variação líquida no saldo de caixa para o próximo ano não vai ficar abaixo da projeção por mais de R\$ 21 milhões devido ao impacto do risco de mercado.

Segundo La Rocque e Werlang (2003) “o EaR nada mais é que o CFaR acrescido de considerações contábeis. Para elucidar a diferença, talvez o melhor exemplo seja o efeito de uma grande desvalorização cambial sobre uma empresa que tenha um grande passivo em dólar no longo prazo. No evento de uma desvalorização cambial, o efeito negativo sobre o fluxo de caixa advindo de um aumento em reais dos pagamento de juros em dólares, poderia ser pequeno. Isto porque a maior parte dos serviços da dívida poderiam estar localizados depois de 1 ano. No entanto, o resultado em balanço seria fortemente afetado, dado que a variação cambial incide diretamente sobre o estoque da dívida. Desta forma, o CFaR indicaria um pequeno risco cambial, enquanto o EaR indicaria um enorme risco para o balanço da empresa. Sendo assim, a métrica de risco mais relevante para a

empresa vai depender do que é mais importante para a mesma: fazer *hedge* para o caixa, ou para o balanço?”

2.3.2 Mapeamento de Exposições

Escolhidas as medidas de risco que serão utilizadas pela empresa (EaR e/ou CFaR), o segundo passo para o cálculo do risco de mercado é o mapeamento das exposições, ou seja, identificar como as variações nas taxas de mercado influenciam cada resultado financeiro. O mapeamento de exposições pode ser feito através de equações ou outros modelos matemáticos.

Como o relacionamento entre os resultados financeiros e as taxas de mercado está sujeito às particularidades de cada empresa, o mapeamento das exposições deve ser fruto de uma pesquisa interna de cada empresa.

O mapeamento da exposição para o lucro das companhias podem ser desde uma simples relação linear, até modelagens mais sofisticadas levando em consideração sazonalidades e a elasticidade do preço em relação às taxas de mercado. Fatores como a habilidade da empresa em alterar o preço de seus produtos em resposta a um movimento do mercado, nível de demanda por produtos ou serviços sob diferentes condições de mercado e política de *hedge* devem ser considerados nesta etapa do processo de cálculo do risco de mercado.

Ao analisar a exposição a múltiplos fatores de risco ou de forma consolidada para toda a empresa, é comum unir vários mapeamentos em um único mais abrangente, ou em um conjunto de equações com regras específicas, como por exemplo, regras contábeis para se chegar ao lucro.

O lucro pode ser analisado como um portfólio de componentes sensíveis às taxas de mercado. A Tabela 3 abaixo lista alguns destes componentes e seus respectivos fatores de riscos:

COMPONENTES DO LUCRO	RISCO DE MERCADO
Receitas em diferentes negócios e países	Taxas de câmbio, commodities
Custo de mercadorias vendidas em diferentes negócios e países	Taxas de câmbio, commodities
Gastos operacionais	Taxas de câmbio, commodities
Gastos com pagamento de juros	Taxas de juros
Perdas e ganhos em contratos financeiros	Taxas de câmbio, taxas de juros, commodities, ações

Tabela 3 - Risco de mercado em alguns componentes do lucro de uma empresa

Do mesmo modo, o fluxo de caixa também pode ser analisado como um portfólio de componentes sensíveis às taxas de mercado. A Tabela 4 abaixo lista alguns destes componentes e seus respectivos fatores de riscos:

COMPONENTES DO FLUXO DE CAIXA	RISCO DE MERCADO
Receitas	Taxas de câmbio, commodities
Custo de mercadorias vendidas	Taxas de câmbio, commodities
Caixa necessário para outras despesas, obrigações contratuais e impostos.	Taxas de câmbio
Atividades de investimento	Taxas de câmbio, taxas de juros, commodities, ações
Atividades de financiamento	Taxas de câmbio, taxas de juros, ações

Tabela 4 - Risco de mercado em alguns componentes do fluxo de caixa de uma empresa

Na prática, a previsão do timing dos fluxos de caixa é extremamente difícil. Na maioria das empresas, o número de entradas e saídas de caixa é enorme e suas datas de ocorrência difíceis de se prever.

O processo de construção de um mapeamento de exposições que traduza fielmente a função entre estes componentes e o resultado financeiro final é bastante custoso pois pode requerer análise minuciosa de dados históricos, análises de regressão, modelagem econométrica e/ou outras técnicas de previsão. As companhias devem então, avaliar cuidadosamente o *trade off* entre o grau de realidade do modelo e o tempo gasto em sua elaboração.

2.3.3 Geração de Cenários de Taxa de Mercado

O terceiro passo para o cálculo do risco de mercado é a geração de um grande número de cenários para as taxas de mercado nos quais serão recalculados os mapeamentos de exposição, chegando assim à distribuição de freqüências dos resultados financeiros analisados (histograma do lucro e/ou fluxo de caixa).

Cada cenário simulado é uma trajetória ao longo do tempo de uma ou mais variáveis de mercado, como por exemplo a evolução de uma taxa de câmbio ao longo de um ano.

O foco desse trabalho é comparar se o método utilizado para a geração desses cenários pela consultoria internacional (Método de Reversão à Média de Ornstein-Uhlenbeck) implica em resultados estatisticamente diferentes quando comparados com outros resultados gerados por simulações que utilizam métodos mais simples, como o Movimento Geométrico Browniano.

Assim, esse tópico será abordado em especial mais à frente, detalhando os dois processos simulatórios utilizados e suas especificidades.

2.3.4 Avaliação e Cálculo do Risco

Os últimos dois passos do processo para o cálculo do risco de mercado são:

- Cálculo dos resultados financeiros simulados, utilizando os mapeamentos de exposição e os N cenários de taxas de mercado para conhecermos as distribuições dos resultados financeiros;
- Cálculo das medidas de risco (CFaR, EaR e etc.) a partir destas distribuições de resultados financeiros.

A avaliação consiste em recalcular os resultados financeiros (lucro e/ou fluxo de caixa) através dos mapeamentos de exposição (modelados no segundo passo do processo) para cada cenário (trajetória ao longo do horizonte de tempo) das taxas que os influenciam.

Conhecendo então um número muito grande de possíveis valores para seu fluxo de caixa do próximo ano, a empresa pode plotá-los em um histograma e analisar sua distribuição de probabilidades como a Figura 4 ilustra abaixo.

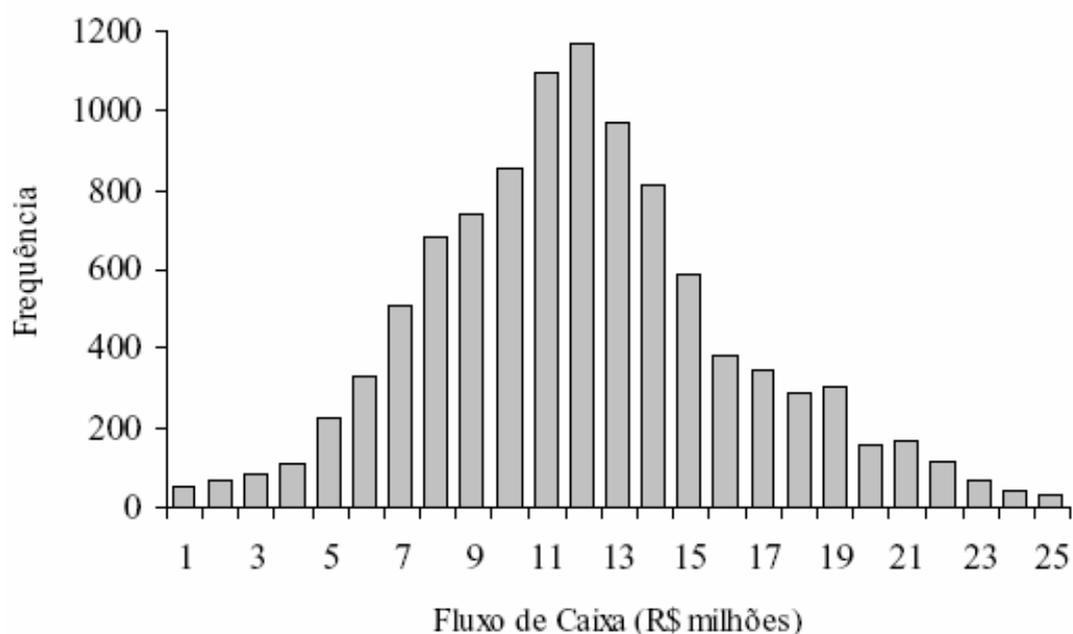


Figura 4 - Distribuição de frequência do fluxo de caixa de uma empresa hipotética

A distribuição de resultados financeiros resultante deste processo reflete o risco de mercado implicado pelas funções de distribuição de probabilidades das diferentes taxas de mercado utilizadas em seu cálculo.

A partir destas distribuições pode-se calcular diversas estatísticas de risco, cada qual descrevendo a distribuição de resultados financeiros sob diferentes aspectos. Algumas delas são:

- Desvio-padrão – uma medida simétrica em relação ao valor esperado (ou média) do resultado financeiro simulado. Aplicável apenas nos casos em que os resultados financeiros são distribuídos normalmente. Por ser uma medida simétrica de dispersão, não distingue entre as caudas acima e abaixo da média.
- Análise de nível de confiança – reflete a probabilidade do resultado financeiro analisado não ficar aquém (ou abaixo) de um certo nível. A interpretação desta medida é bastante simples, a probabilidade do lucro do próximo semestre ficar além (ou acima) do nível de confiança de 95%, é por definição, 95%. Não existe um nível de confiança melhor (ex.: 95%, 97,5% e etc.), ficando sua escolha a critério do analista. Caso a distribuição de probabilidades seja normal, basta conhecer seu desvio padrão para calcular o nível de confiança, já para distribuições não-lineares, é preciso conhecer toda a distribuição para que seja calculado o nível de confiança através do percentil (Y% de confiança é dado pelo resultado do percentil (100-Y) %).
- Queda máxima em relação a uma previsão, para um dado nível de confiança – indica um valor máximo (em unidades monetárias) em que o lucro/fluxo de caixa pode ficar aquém (ou abaixo) de uma previsão (meta, valor orçado e etc.) devido ao risco de mercado, dado um nível de confiança. O EaR e o CFaR são os exemplos mais conhecidos de medidas de risco relativo.

Dentre estas e outras medidas de risco, o risco relativo é a mais importante no ambiente corporativo. Para se calcular esta medida, é necessário fazer primeiramente uma análise de nível de confiança, conhecida como cálculo do risco absoluto, para somente então compará-la ao resultado financeiro previsto pela companhia. A Figura 5 descreve o processo de cálculo do risco relativo a partir do risco absoluto.

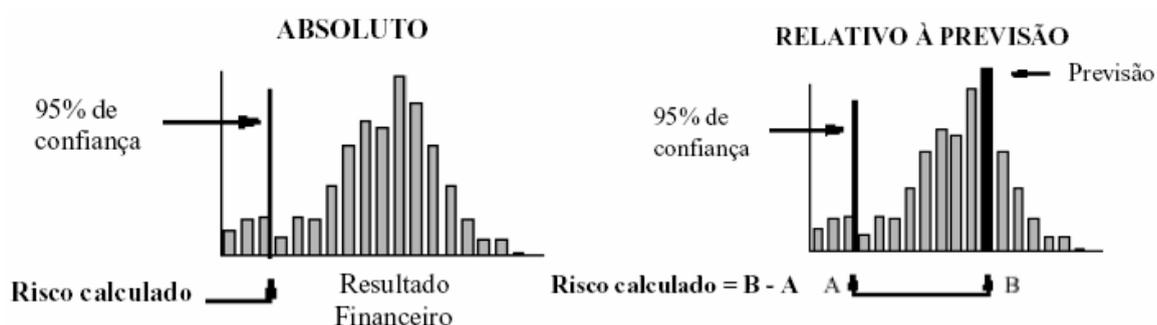


Figura 5 - Risco absoluto e risco relativo à previsão

O cálculo do risco absoluto identifica um resultado financeiro para o qual conhecemos a probabilidade deste valor ser excedido ou não. Ou ainda, o pior caso do potencial resultado financeiro para um dado nível de confiança. O *Value at Risk* é um bom exemplo de risco absoluto. Este valor potencial pode ser obtido ordenando-se de forma decrescente os resultados obtidos nas simulações e identificando aquele correspondente ao nível de confiança (percentil) desejado. Conseqüentemente, quanto maior o número de cenários simulados, mais preciso será o valor tanto do risco absoluto quanto do risco relativo.

Ao converter esta série de resultados das simulações em um histograma, o ponto do eixo x correspondente ao valor do risco absoluto calculado com Y% de confiança, será aquele em que Y% das observações (resultados simulados) estarão à sua direita e (100-Y)% estarão à sua esquerda no gráfico.

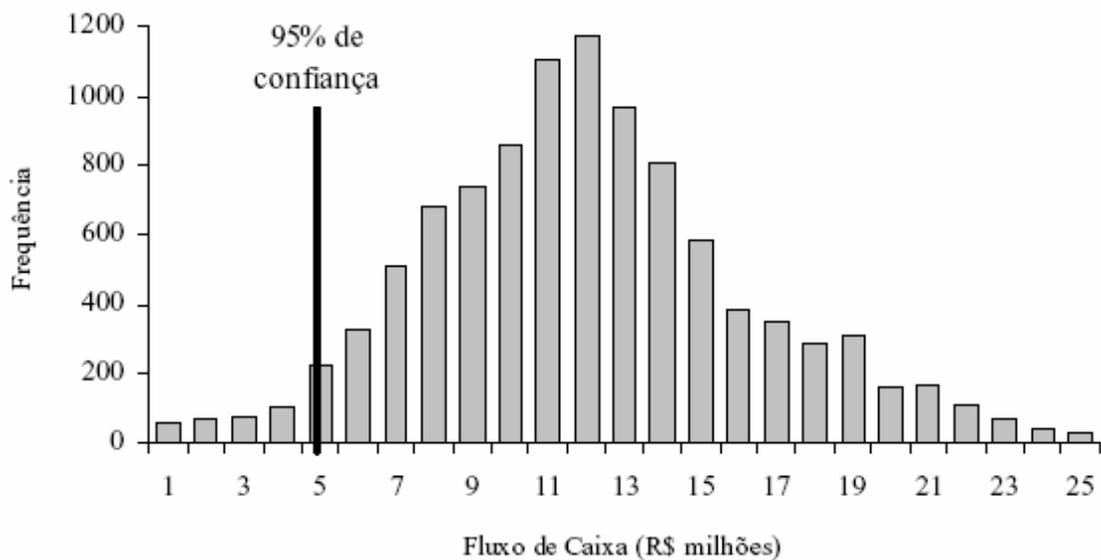


Figura 6 - Risco absoluto - fluxo de caixa com 95% de confiança

Tomando como exemplo uma empresa que tenha previsto um fluxo de caixa líquido de R\$ 13,7 milhões para o próximo ano e tenha calculado um risco absoluto com 95% de confiança de R\$ 5,9 milhões. O CFaR (risco relativo a uma previsão) com 95% de confiança desta companhia será dado pela diferença entre o resultado financeiro previsto e o seu risco absoluto. Portanto seu CFaR será igual a R\$ 7,8 milhões (R\$13,7 milhões – R\$5,9 milhões).

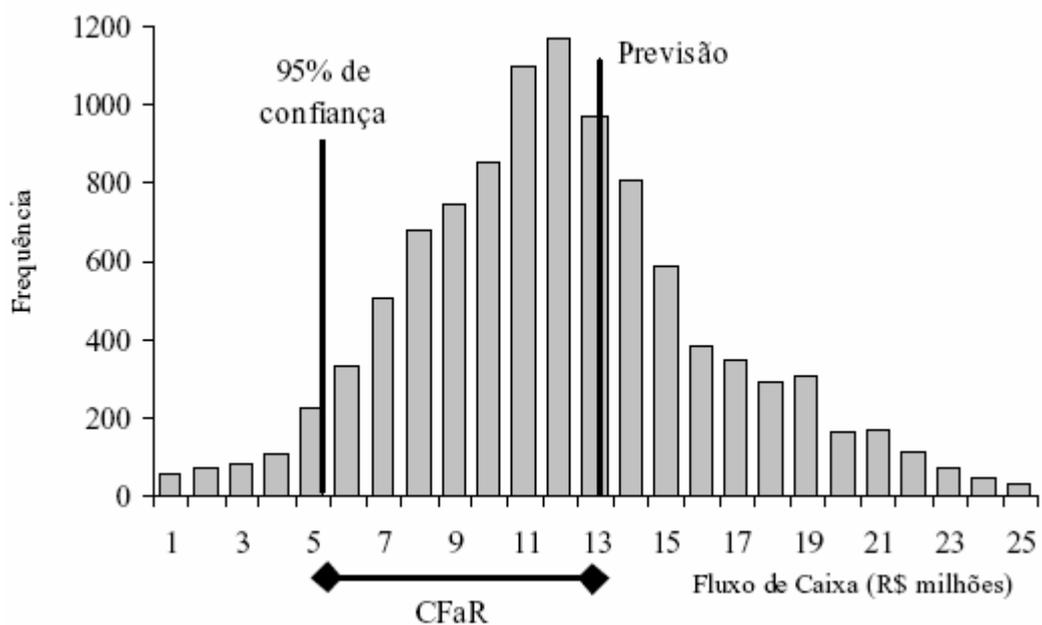


Figura 7 - Risco relativo - CFaR com 95% de confiança

O procedimento de quantificação do risco relativo é o mesmo tanto para o cálculo do CFaR, quanto do EaR, EPSaR ou qualquer outra medida semelhante.

2.4 Modelos de Simulação

2.4.1 Processos Estocásticos e Movimento Geométrico Browniano

Pode-se dizer que qualquer variável cujas mudanças nos seus valores ao longo do tempo ocorram de maneira incerta segue um processo estocástico (Hull, 2003). Os processos estocásticos podem ser divididos em discretos e contínuos, sendo que o primeiro pressupõe que os valores de determinadas variáveis oscilem em determinados pontos no tempo e os segundo permite que as oscilações ocorram em qualquer instante de tempo. Apesar dos ativos financeiros seguirem um processo estocástico discreto, ou seja, as cotações variarem conforme frações de preço e as variações dependerem da ocorrência de negócios, os modelos contínuos se prestam muito bem para a maioria dos modelos utilizados em finanças.

Um movimento browniano, ou processo de Wiener, é um processo aleatório contínuo que apresenta três importantes propriedades:

1. é um processo de Markov, ou seja, a distribuição de probabilidades dos valores futuros do processo dependem somente do seu valor atual, não sendo afetado pelos valores passados do processo, ou por qualquer outra informação;
2. possui incrementos independentes, ou seja, a distribuição de probabilidades da variação do processo em um intervalo de tempo, é independente de qualquer outro intervalo de tempo (que não sobreponha o primeiro);

3. as variações de um processo, em um intervalo de tempo finito, seguem uma distribuição normal, com variância que cresce linearmente com o intervalo de tempo.

Dado $z(t)$, um processo de Wiener, Δz uma variação de $z(t)$, e Δt um intervalo de tempo qualquer, tem-se:

1. $\Delta z = e_t \cdot \sqrt{\Delta t}$, onde e_t é uma variável aleatória que segue uma distribuição normal padrão, com média 0 (zero) e desvio padrão 1 (um);

2. a variável aleatória e_t não é correlacionada serialmente, ou seja, $E(e_t \cdot e_s) = 0$ para $t \neq s$.

Quando o intervalo de tempo Δt torna-se infinitesimalmente pequeno, pode-se representar a variação de um processo de Wiener, dz , em tempo contínuo como:

$$dz = e_t \cdot \sqrt{dt} \quad (2.5)$$

Um movimento browniano com tendência é uma extensão do processo acima, sendo representado pela seguinte equação estocástica:

$$dx = a \cdot dt + s \cdot dz \quad (2.6)$$

onde a é o parâmetro de tendência (ou crescimento), s é o parâmetro de variância, x é um processo estocástico, como, por exemplo, o preço de uma ação.

Para qualquer intervalo de tempo Δt , a variação em x , possui distribuição normal, com esperança $E(\Delta x) = a \cdot \Delta t$, e variância $Var(\Delta x) = s^2 \cdot \Delta t$.

Um movimento geométrico browniano com tendência é definido pela equação abaixo:

$$dx = \mathbf{a}.x.dt + \mathbf{s}.x.dz \quad \text{ou} \quad \frac{dx}{x} = \mathbf{a}.dt + \mathbf{s}.dz \quad (2.7)$$

2.4.1.1 Lema de Itô

Um processo estocástico contínuo $x(t)$ é chamado de processo de Itô, quando é representado pela equação:

$$dx = a(x,t).dt + b(x,t).dz \quad (2.8)$$

onde $a(x,t)$ é a função não-aleatória de tendência, $b(x,t)$ é a função não-aleatória da variância, $z(t)$ é um processo de Wiener, e t é o tempo.

Percebe-se que o movimento geométrico browniano é um caso especial do processo de Ito, onde $a(x,t) = \mathbf{a}.x$ e $b(x,t) = \mathbf{s}.x$.

Dada uma função $F(x,t)$ diferenciável no mínimo duas vezes em x , e uma vez em t , o lema de Itô mostra que a mesma segue o seguinte processo:

$$dF = \left[\frac{\partial F}{\partial t} + a(x,t). \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}.b^2(x,t). \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right].dt + b(x,t). \frac{\partial F}{\partial x}.dz \quad (2.9)$$

Este lema é a base de fórmulas e métodos de precificação de derivativos, pois $F(x,t)$ pode ser o preço de um contrato de futuro de índice bovespa, ou o preço de uma opção de compra da ação da Eletrobrás.

Enquanto parece razoável que o preço de uma ação siga um processo de Markov, e tenha incrementos independentes, não é razoável assumir que as variações do preço sigam uma distribuição normal, afinal o preço de uma

ação não pode ser inferior a zero. Assim, pode-se assumir que os preços de uma ação sigam uma distribuição lognormal, ou seja, as variações no logaritmo do preço seguem uma distribuição normal.

Dessa forma, sendo X o processo geométrico browniano que descreve o preço da ação, e $F(X)=\ln(X)$, tem-se, pelo lema de Itô:

$$dX = \mathbf{a}.X .dt + \mathbf{s}.X .dz$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial X} = \frac{1}{X}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} = \frac{-1}{X^2}$$

$$dF = \left[0 + \mathbf{a}.X .\frac{1}{X} + \frac{1}{2}.(\mathbf{s}.X)^2 .\frac{-1}{X^2} \right] dt + \mathbf{s}.X .\frac{1}{X} .dz = \left(\mathbf{a} - \frac{\mathbf{s}^2}{2} \right) dt + \mathbf{s} .dz \quad (2.10)$$

Assim, baseado nos resultados obtidos acima e na análise do movimento browniano, tem-se que dentro do intervalo de tempo T , a variação em $\ln(S)$ segue uma distribuição normal com média $\left(\mathbf{a} - \frac{\mathbf{s}^2}{2} \right) T$, e variância $\mathbf{s}^2 T$.

A versão discreta da equação estocástica acima pode ser escrita da seguinte forma:

$$\ln \left(\frac{X_t}{X_0} \right) = \left(\mathbf{a} - \frac{\mathbf{s}^2}{2} \right) \Delta t + \mathbf{s} . \sqrt{\Delta t} . \mathbf{e}_t \quad (2.11)$$

ou

$$X_t = X_0 . e^{\left[\left(\mathbf{a} - \frac{\mathbf{s}^2}{2} \right) \Delta t + \mathbf{s} . \sqrt{\Delta t} . \mathbf{e}_t \right]} \quad (2.12)$$

2.4.2 Amostragem Aleatória Simples (AAS)

Entende-se por amostragem aleatória simples o processo de geração de números aleatórios. Sabe-se, entretanto, que o processo de geração dos números aleatórios segue uma seqüência lógica ou uma expressão de recorrência, o que faz com o que o processo perca parte de sua aleatoriedade. Assim, a literatura atribui o nome de pseudo-aleatórios aos números determinísticos gerados via computador. Entretanto, neste trabalho, por questões de difusão de nomenclatura, utiliza-se o termo aleatório em substituição do termo pseudo-aleatório.

Banks & Carson (1996) descrevem os números aleatórios como o ingrediente básico de uma simulação e afirmam que uma seqüência de números aleatórios deve apresentar uniformidade e independência. Sabe-se que os números aleatórios apresentam uma distribuição uniforme entre 0 e 1, cuja função de distribuição de probabilidades é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \end{cases} \quad (2.13)$$

O valor esperado e a variância dos números aleatórios, A_i , gerados são dados, respectivamente, por:

$$E(A_i) = \int_0^1 x \cdot dx = \frac{1}{2} \quad (2.14)$$

$$Var(A_i) = \int_0^1 x^2 - [E(x)]^2 \cdot dx = \frac{1}{12} \quad (2.15)$$

Segundo Lehmer (1951), o método da congruência linear é a técnica mais comum de geração de números aleatórios, e apresenta a fórmula de recorrência para a geração dos números aleatórios a seguir:

$$X_{i+1} = (a.X_i + c). \text{mod } m \quad (2.16)$$

$$A_i = \frac{X_i}{m} \quad (2.17)$$

A expressão 2.16 apresenta os parâmetros “a”, “c” e “m”, que são números inteiros, onde:

- O valor inicial X_1 é chamado de semente;
- O parâmetro “a” é chamado de constante multiplicadora;
- “c” é o incremento; e
- “m” refere-se ao módulo.

A operação “mod m” refere-se ao resto da divisão por “m”.

Assim, a escolha dos parâmetros influi significativamente nas propriedades estatísticas e no tamanho do ciclo de recorrência, uma vez que os números aleatórios, gerados pela expressão 2.17, terão valores repetidos após um ciclo de m números.

A qualidade de geração dos números aleatórios é um aspecto importante nas fórmulas de recorrência. Assim, Banks & Carson (1996) descrevem os erros mais comuns na geração de números aleatórios:

- 1 – Os números gerados podem não se apresentar uniformemente distribuídos;
- 2 – Os números gerados podem ser considerados discretos ao invés de contínuos.
- 3 – A média e a variância dos números gerados podem apresentar valores muito reduzidos ou muito elevados.
- 4 – Pode haver ocorrência de autocorrelação entre os números.
- 5 – Pode haver números extremamente elevados ou reduzidos em relação aos números adjacentes.

6 –Pode haver números muito superiores à média seguidos de números bastante inferiores.

De maneira a garantir a qualidade dos números gerados sobre os aspectos de uniformidade e independência, diversos testes podem ser realizados. Uma descrição detalhada dos testes pode ser encontrada em Banks & Carson (1996).

2.4.2.1 Geração de Variáveis Aleatórias Correlacionadas

Na prática, os portfólios são compostos por mais de uma fonte de risco ou ativo financeiro. Quando se utiliza a simulação para descrever o comportamento destes fatores de risco, deve-se levar em consideração a correlação entre eles. A fatoração de Cholesky é o método mais conhecido para a incorporação da correlação na geração de seqüências aleatórias.

Genericamente, para três variáveis, considere que a estrutura de correlação possa ser representada pela multiplicação das matrizes TxT' , onde T é triangular inferior.

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{r}_{12} & \mathbf{r}_{13} \\ \mathbf{r}_{12} & 1 & \mathbf{r}_{23} \\ \mathbf{r}_{13} & \mathbf{r}_{23} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^2 & a_{11}a_{12} & a_{11}a_{13} \\ a_{11}a_{12} & a_{12}^2 + a_{22}^2 & a_{13}a_{12} + a_{23}a_{22} \\ a_{11}a_{13} & a_{13}a_{12} + a_{23}a_{22} & a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 \end{bmatrix}$$

E assim, tem-se:

$$a_{11} = 1$$

$$a_{12} = \mathbf{r}_{12}$$

$$a_{13} = \mathbf{r}_{13}$$

$$a_{22} = (1 - \mathbf{r}_{12}^2)^{1/2}$$

$$a_{23} = \frac{\mathbf{r}_{23} - \mathbf{r}_{12} \cdot \mathbf{r}_{13}}{(1 - \mathbf{r}_{12}^2)^{1/2}}$$

$$a_{33} = \left[1 - \mathbf{r}_{13}^2 - \left(\frac{\mathbf{r}_{23} - \mathbf{r}_{12} \cdot \mathbf{r}_{13}}{(1 - \mathbf{r}_{12}^2)^{1/2}} \right)^2 \right]^{1/2}$$

Pela fatoração de Cholesky, os valores aleat3rios modificados (com a incorporação das correlações) s3o obtidos pela multiplicação entre a matriz T (com valores encontrados acima) e o vetor de valores aleat3rios originais.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{r}_{12} & (1 - \mathbf{r}_{12}^2)^{1/2} & 0 \\ \mathbf{r}_{13} & \frac{\mathbf{r}_{23} - \mathbf{r}_{12} \cdot \mathbf{r}_{13}}{(1 - \mathbf{r}_{12}^2)^{1/2}} & \left[1 - \mathbf{r}_{13}^2 - \left(\frac{\mathbf{r}_{23} - \mathbf{r}_{12} \cdot \mathbf{r}_{13}}{(1 - \mathbf{r}_{12}^2)^{1/2}} \right)^2 \right]^{1/2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Outros m3todos de geração de vari3veis aleat3rias correlacionadas s3o o *Singular Value Decomposition* (JP Morgan, 1996) e o algoritmo de Gram-Schmidt (Owen, 1992).

2.4.3 Simulação de Monte Carlo

Segundo Saliby (1989), a simulação 3 uma t3cnica de pesquisa operacional, que corresponde a realização de experimentos num3ricos com modelos l3gico-matem3ticos. Estes experimentos envolvem grandes volumes de c3lculos repetitivos, fazendo uso intensivo de recursos computacionais.

A simulação de Monte Carlo tem grandes aplicações na solução de uma variedade de problemas matem3ticos atrav3s de experimentos computacionais em diversas 3reas do conhecimento, como 3 o caso da simulação de filas, precificação de opções, an3lise de risco etc. O m3todo 3

aplicado tanto em problemas determinísticos quanto àqueles com caráter probabilístico. Sua estrutura é muito simples e flexível o que faz com que a Simulação de Monte Carlo possa ser aplicada em problemas de qualquer nível de complexidade. Entretanto, a maior inconveniência do método recai sobre o número de simulações necessárias para se reduzir o erro da estimativa da solução procurada, o que tende, na prática, a tornar o método muito lento.

Na literatura, existem relatos de aplicações do método de SMC em estudos de jogos de azar, dentre outros, realizados por matemáticos dos séculos XVI e XVII. No final de século XIX e início do século XX, o método também foi aplicado como forma de avaliação de médias de funções com variáveis aleatórias contínuas através da aproximação por integrais.

Porém, a origem do método de Simulação de Monte Carlo se deu durante a Segunda Guerra Mundial, ao longo das pesquisas no Laboratório de Los Alamos, que resultaram na construção da primeira bomba atômica. O método foi proposto por Von Neumann e Ulam para solução de problemas matemáticos cujo tratamento analítico não se mostrava viável. Primeiramente, voltava-se à avaliação de integrais múltiplas para o estudo da difusão de nêutrons. Posteriormente, verificou-se que ele poderia ser aplicado em outros problemas matemáticos mais complexos de natureza determinística. O nome Monte Carlo, famoso cassino de Mônaco fundado em 1862, foi adotado por razões de sigilo das pesquisas e pelo fato da presença da aleatoriedade lembrar os jogos de azar.

A base do método de Monte Carlo reside na amostragem de números aleatórios, que pode ser realizada de diferentes maneiras, fazendo-se uso das chamadas técnicas de redução de variância que são aplicadas de forma a se reduzir o tempo de processamento da simulação bem como a precisão das estimativas. Nesse contexto, Boyle (1997) afirma que a simulação de

Monte Carlo torna-se preferível a outros métodos numéricos na medida em que o número de dimensões do problema cresce.

No mundo financeiro, a simulação de Monte Carlo tem se mostrado bastante eficiente como ferramenta de avaliação de problemas associados à análise de risco, precificação de contratos, testes de cenários e outros. Especificamente, a precificação de contratos derivativos via simulação de Monte Carlo iniciou-se com os trabalho de Boyle (1977), que utilizou a abordagem estocástica dos preços dos ativos como forma de simular um contrato derivativo.

Em escala comercial, Davidson (2002), em uma reportagem para a revista RISK, afirma que muitos bancos já utilizam esta ferramenta como forma de avaliar os problemas financeiros de alta complexidade, com muitos fatores de risco e que não são facilmente tratados através de soluções analíticas. Assim, a simulação de Monte Carlo aparece como uma maneira de se encontrar respostas aproximadas ou distribuições mais prováveis para os resultados de um problema. Outras aplicações são citadas naquela reportagem como o caso dos bancos americanos que utilizam a simulação de Monte Carlo como forma de se validar as soluções obtidas pelos modelos de árvores binomiais e algumas soluções analíticas de difícil comprovação.

2.4.3.1 Descrição do Método de Monte Carlo

A implementação de uma simulação de Monte Carlo apresenta etapas semelhantes para a maioria dos problemas em que esta ferramenta é empregada. Especificamente, apresentam-se os passos utilizados para a realização de uma simulação de Monte Carlo para a precificação de um instrumento financeiro. Tem-se:

1 – Simular caminhos aleatórios para os fatores de risco do problema, ou seja, as variáveis do problema que apresentam uma distribuição conhecida de resultados.

2 – Avaliar os resultados de cada caminho aleatório segundo as especificidades de cada contrato.

3 – Realizar o cálculo do valor esperado do contrato através de um cálculo da média dos valores obtidos na etapa 2.

4 – Calcular o valor presente do contrato que foi obtido na etapa 3.

Supondo que o valor de um contrato derivativo seja expresso por q e que os valores dos preços gerados aleatoriamente, como descrito na etapa 1, sejam representados por $\hat{q}_i | i = 1, 2, \dots, n$. Dessa forma, o valor esperado e a variância de \hat{q}_i podem ser representados, respectivamente, por \tilde{q} e s^2 .

Assim, o valor estimado de q pode ser representado como a média das n simulações realizadas, representada como sendo:

$$\tilde{q} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{q}_i \quad (2.19)$$

De acordo com o teorema do limite central, para grandes valores de n , a variância e o desvio padrão do estimador q são dados, respectivamente, por:

$$s_q^2 = \frac{s^2}{n} \quad (2.20)$$

$$s_q = \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (2.21)$$

Segue, então, que o estimador para a variância, s^2 , é dado por:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^N (\hat{q}_i - q)^2 \quad (2.22)$$

Da expressão 2.21, conhecida como erro padrão, tem-se que o desvio padrão é diretamente proporcional à $N^{-1/2}$, ou seja, para se reduzir o desvio padrão pela metade, deve-se quadruplicar o número de amostras. Este ponto é apontado como uma das principais deficiências do método de Monte Carlo, uma vez que a precisão da estimativa procurada só é obtida sob um custo bastante elevado de uso computacional para a geração de amostras maiores.

Uma discussão mais detalhada sobre o *trade-off* existente entre precisão e tempo de processamento é encontrada em Boyle (1997). Esta discussão serve com um argumento para a introdução das chamadas técnicas de redução de variância, que se apresentam como alternativas para a geração dos números aleatórios utilizados na simulação e surgem como forma de aumento de precisão e redução do tempo de processamento.

2.4.4 Simulação de MC utilizando-se o Movimento Geométrico Browniano

Considere que o preço X de uma commodity segue um Movimento Geométrico Browniano, conforme a equação estocástica 2.7 relembra abaixo:

$$dx = a.x.dt + s.x.dz \quad (2.7)$$

Onde:

- dz é um processo incremental de Wiener, definido pela equação 2.5
($dz = e_i \cdot \sqrt{dt}$)

- e_t é uma variável aleatória que segue uma distribuição Normal padrão (N(0,1))
- a é o arrasto ou tendência do preço da commodity, observada historicamente.
- e s é a volatilidade do preço x da commodity.

Utilizando-se uma transformação logarítmica e aplicando-se o Lema de Itô (seção 2.4.1.1 deste trabalho) chega-se à equação discreta de simulação de preços abaixo. Assim, à um instante t futuro qualquer, o preço da commodity X_t será dado por:

$$X_t = X_0 \cdot e^{\left[\left(a - \frac{s^2}{2} \right) \Delta t + s \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot N(0,1) \right]} \quad (2.23)$$

A simulação de Monte Carlo dos preços reais usando a equação acima é feita escolhendo-se ao acaso valores aleatórios e obtendo sua distribuição Normal padrão (N(0,1)), e assim chegando-se ao preço X_t correspondente. Esses valores de X podem então ser utilizados para calcular a distribuição de freqüência dos possíveis valores de um projeto P qualquer, através de uma fórmula $P(x)$.

Mais especificamente, essas simulações podem ser utilizadas para o cálculo do VaR de uma carteira composta por diversos ativos. Utilizando-se a fatoração de Cholesky (seção 2.4.2.1 deste trabalho) para gerar variáveis aleatórias correlacionadas conforme a composição da carteira em questão, é possível simular a distribuição de freqüência dos possíveis valores dos ativos que compõe essa carteira, e para um certo nível de confiança, o VaR da carteira, conforme procedimento descrito na seção 2.2 deste trabalho.

Uma importante característica da equação discreta 2.23 é que a discretização em relação à sua forma contínua é exata e precisa. Em outras palavras, não é necessário utilizar pequenos incrementos de tempo Δt para se obter uma

boa aproximação. Pode-se utilizar qualquer tamanho de Δt que a equação de simulação será válida (pode-se facilmente confirmar essa afirmação avaliando-se o valor de uma opção de compra europeia com tempo para vencimento de 1 ano, através da simulação do valor do ativo-objeto na data de vencimento, e comparando o valor encontrado com o valor obtido pela fórmula de Black-Scholes)

2.4.5 Simulação de MC utilizando-se o Movimento de Reversão à Média de Ornstein-Uhlenbeck

Considerando inicialmente o processo aritmético de Ornstein-Uhlenbeck para uma variável estocástica $x(t)$:

$$dx = \mathbf{h} \cdot (\bar{x} - x) \cdot dt + \mathbf{s} \cdot dz \quad (2.24)$$

A equação acima difere sutilmente em relação à equação 2.6 que define o movimento browniano, pois tende a considerar as leis econômicas de oferta e demanda. Isso quer dizer que existe uma força de reversão que atua na variável x puxando-a para um patamar de equilíbrio de longo prazo \bar{x} , funcionando como uma mola. A velocidade dessa força ou processo de reversão é dado pelo parâmetro \mathbf{h} .

Essa equação diferencial estocástica é solucionável explicitamente (veja Kloeden e Platen, 1992) e tem a seguinte solução em termos de integral estocástica (integral de Itô):

$$x_{(T)} = x_{(0)} \cdot e^{-\mathbf{h} \cdot T} + (1 - e^{-\mathbf{h} \cdot T}) \cdot \bar{x} + \mathbf{s} \cdot e^{-\mathbf{h} \cdot T} \cdot \int_0^T e^{\mathbf{h} \cdot t} \cdot dz(t) \quad (2.25)$$

A variável $x_{(T)}$ tem distribuição Normal com as seguintes equações para valor esperado e variância (Dixit e Pindyck, 1994):

$$E(x_{(T)}) = x_{(0)}.e^{-h.T} + \bar{x}.(1 - e^{-h.T}) \quad (2.26)$$

$$Var(x_{(T)}) = (1 - e^{-2h.T}).\frac{s^2}{2h} \quad (2.27)$$

Note que a equação do valor esperado nada mais é do que a média ponderada entre o valor inicial $x_{(0)}$ e o valor de equilíbrio de longo prazo \bar{x} (ponderada em função do tempo T e da velocidade de reversão h).

A variância aumenta com o tempo, mas também converge para $\frac{s^2}{2h}$ quando o tempo tende à infinito.

Existe uma relação entre a velocidade de reversão (h) e a meia-vida (H) do processo, tal que:

$$H = \frac{\ln(2)}{h} \quad (2.28)$$

Meia-vida é o tempo esperado no qual a variável estocástica x atinge metade do caminho até o equilíbrio de longo prazo \bar{x}

Para poder realizar a simulação é necessário utilizar a equação discreta para esse processo. De acordo com Dixit e Pindyck (1994), a correta equação discreta para o processo de reversão à média contínuo acima (equação 2.25) é dada pelo processo estacionário auto-regressivo de primeira ordem, AR(1):

$$x_t = x_{t-1}.e^{-h.\Delta t} + \bar{x}.(1 - e^{-h.\Delta t}) + s.\sqrt{\frac{1 - e^{-2h.\Delta t}}{2h}}.e_t \quad (2.29)$$

onde e_t é uma variável aleatória que segue uma distribuição Normal padrão $N(0,1)$

É importante notar que a equação acima tem distribuição Normal e pode assumir valores negativos. Na maioria das aplicações onde essa simulação é utilizada é desejável que a variável estocástica assuma somente valores positivos, como por exemplo quando trabalha-se com preços de commodities.

Para contornar essa situação, é necessário alterar a equação discreta 2.29, criando uma relação entre o preço de commodity P e a variável $x_{(t)}$, e o patamar de equilíbrio de longo prazo \bar{x} e o preço de equilíbrio de longo prazo da commodity \bar{P} .

Para isso, assume-se que o preço da commodity P segue um processo estocástico de reversão à média cujo patamar de equilíbrio de longo prazo \bar{P} é dado pela equação:

$$\bar{x} = \ln(\bar{P}) \quad \text{ou} \quad \bar{P} = e^{\bar{x}} \quad (2.30)$$

Além disso, é necessário estabelecer a seguinte premissa sobre valor esperado de P :

$$E(P_{(T)}) = e^{E(x_{(T)})} \quad (2.31)$$

Ou seja, a relação entre as variáveis x e P é tal que o valor esperado das simulações de preço da commodity P no instante T é dado por:

$$E(P_{(T)}) = e^{\left[x_{(0)} \cdot e^{-h \cdot T} + \bar{x} \cdot (1 - e^{-h \cdot T}) \right]} \quad (2.32)$$

Essa premissa não funciona para o processo discreto $P_{(t)}$, já que a exponencial de uma distribuição Normal adiciona metade da variância à média de uma distribuição Log-Normal. Para atingir o objetivo da equação

2.31 na forma discreta para $P_{(t)}$, é necessário então compensar a equação com a metade da variância, segundo a equação abaixo:

$$P_{(t)} = e^{\left[x_{(t)} - \frac{Var(x_{(t)})}{2} \right]} \quad (2.33)$$

onde $Var(x_{(t)})$ é a função determinística do tempo dada na equação 2.27.

Com as equações acima é fácil simular os possíveis caminhos que o preço da commodity P pode assumir, segundo um processo estocástico de reversão à média. Basta simular $x_{(t)}$ usando a equação 2.29, escolhendo-se ao acaso valores aleatórios e obtendo sua distribuição Normal padrão $N(0,1)$, e a seguir utilizar a equação 2.27 para calcular $Var(x_{(t)})$. Por fim, usando a equação 2.33 chega-se ao valor simulado do preço da commodity P. O processo é repetido ao longo de 1 caminho (ao longo do tempo para cada instante discreto t) e para n caminhos distintos, como ilustra a figura abaixo.

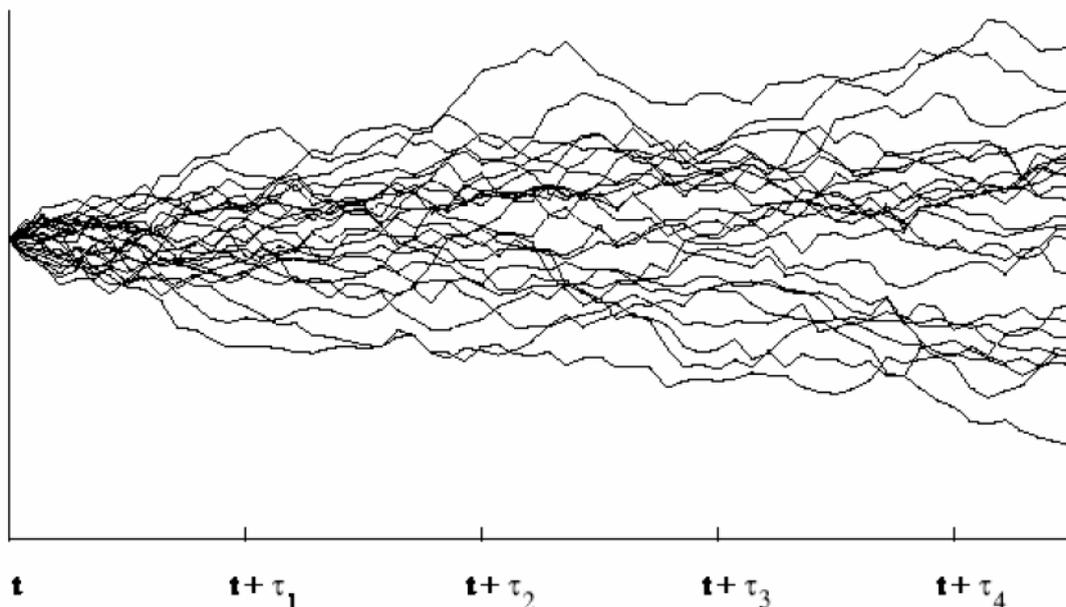


Figura 8 - Simulação ilustrativa da trajetória de preços de uma commodity P

Pode-se simular os preços $P_{(t)}$ diretamente, combinando-se as três equações (2.29, 2.27 e 2.33), conforme a equação abaixo:

$$P_{(t)} = \exp \left\{ \left[\ln(P_{(t-1)}) \cdot e^{-h \cdot \Delta t} \right] + \left[\ln(\bar{P}) \cdot (1 - e^{-h \cdot \Delta t}) \right] - \left[(1 - e^{-2h \cdot \Delta t}) \cdot \frac{\mathbf{s}^2}{4h} \right] + \left[\mathbf{s} \cdot \sqrt{\frac{1 - e^{-2h \cdot \Delta t}}{2h}} \cdot N(0,1) \right] \right\} \quad (2.34)$$

A interpretação dos 4 termos dentro da primeira exponencial são:

- a) o primeiro e segundo termo representam o arrasto ou tendência, onde pondera-se o valor inicial e o valor de equilíbrio de longo prazo (observe que a ponderação é um valor de soma igual à 1)
- b) o terceiro termo é a compensação da metade da variância, explicada na equação 2.33
- c) e o quarto e último termo é a parcela estocástica (com a Normal padrão $N(0,1)$), que introduz a aleatoriedade durante a simulação de Monte Carlo.

Vale notar que o parâmetro da volatilidade entra somente no terceiro e quarto termos, e não no arrasto ou tendência, condizente com a intuição.

3. Metodologia

Nesta seção, serão apresentadas as classificações deste trabalho em categorias quanto aos fins e meios empregados, serão discutidos o universo e amostra de dados utilizados em ambas simulações para o conseqüentemente cálculo do fluxo de caixa em risco, e suas formas de coleta e tratamento. Também serão apresentadas as principais limitações dos métodos e ferramentas utilizadas.

3.1 Tipo de pesquisa

O estudo a ser realizado consistirá na implementação de dois modelos de simulação para o cálculo do CFaR: modelo de Reversão à Média de Orsntein-Uhlenbeck e o modelo de simulação de Monte Carlo simples, utilizando o Movimento Geométrico Browniano.

Comparativamente, ambos modelos possuem igual entendimento e forma de cálculo. Porém, o Modelo Geométrico Browniano possui menor complexidade na estimação de seus parâmetros quando comparado com o modelo de Reversão à Média. Será realizada a comparação dos resumos estatísticos dos CFaRs gerados pelos dois diferentes modelos de simulação, seguido de teste-t emparelhado. Também será calculada a matriz de correlação de ambas as séries de CFaRs geradas para verificar a robustez do experimento, assim como uma análise exploratória dos dados gerados para fins de comparação entre o resultado gerados pelos dois modelos empregados.

Este trabalho pode ser classificado em relação a dois aspectos: quanto aos fins e quanto aos meios empregados. No primeiro aspecto, este trabalho trata-se de uma pesquisa exploratória, visto que o experimento é relacionado à descobertas recentes e será aplicado em uma situação ainda não apresentada na literatura.

Quanto aos meios empregados, pode-se classificar este trabalho em duas categorias. É uma pesquisa de laboratório, pois será realizada através de uso intensivo de computador e suas ferramentas (programas de simulação, planilhas de dados, internet, etc.). Também é uma pesquisa experimental, uma vez que permitirá analisar e comparar dois modelos de simulação diferentes cujos resultados passarão pelo mesmo processo de cálculo de CFaR.

3.2 Experimento realizado

O experimento a ser realizado, neste trabalho, será a comparação de dois métodos de simulação aplicados no cálculo do CFaR para os próximos 12 meses do setor de downstream de uma empresa petrolífera. Ou seja, utilizando-se os dois métodos de simulação descritos na seção 2 deste trabalho, pretende-se simular a trajetória mensal de 15 commodities para os 12 meses seguintes (30 corridas com 1.000 simulações de 12 passos cada), e usar os resultados obtidos de ambas as simulações para calcular o CFaR da cia.

A empresa petrolífera em questão atua tanto no mercado interno brasileiro como no mercado internacional, através de importações e exportações. Assim, foram mapeadas os seguintes produtos e commodities de mercado correspondentes, como os responsáveis pelos impactos mais significativos no fluxo de caixa da empresa (receitas e custos), conforme tabela a seguir:

Produto	Commodity Banco de Dados (Unidade)	Legenda
Mercado Interno		
Diesel	Diesel Interno Cia. (US\$/Bbl)	Diesel MI
GLP	Gases Liquefeitos Energéticos Interno Cia. (US\$/Bbl)	GLP MI
Óleo Combustível	Óleos Combustíveis ATE Interno Cia. (US\$/Bbl)	OC MI
Gasolina	Gasolina Automotiva Interno Cia. (US\$/Bbl)	Gasolina MI
JET Fuel	Querosene de Aviação Interno Cia. (US\$/Bbl)	QAV MI
Nafta	Naftas Não-Energéticas Interno Cia. (US\$/Bbl)	Nafta MI
Petróleo Pesado	Marlim Dated Platt's Mid (US\$/Bbl)	Marlim ME
Mercado Externo		
Diesel	No. 2 USG Waterborne Platt's Mid (US\$/Bbl)	Diesel ME
GLP	Propane Mt Belvieu TET Platt's Mid (US\$/Bbl)	GLP ME
Óleo Combustível	No.6 1%/LSFO NYH Cargoes Platt's Mid (US\$/Bbl)	OC ME
Gasolina	Unleaded RFG NYH Cargoes Platt's Mid (US\$/Bbl)	Gasolina ME
JET Fuel	Jet/Kero Gd54 USG Waterborne Platt's Mid (US\$/Bbl)	QAV ME
Nafta	Naphtha Physc NWE CIF ARA Platt's Mid (US\$/Bbl)	Nafta ME
Petróleo Leve	Brent Dated Platt's Mid (US\$/Bbl)	Brent ME
Marine Fuel	380 Cst Santos Platt's Mid (US\$/Bbl)	Marine Fuel ME

Tabela 5 - Relação de Commodities Simuladas

É importante ressaltar que nem todos os produtos que impactam o fluxo de caixa da empresa são precificados com base em commodities negociadas no mercado. Assim, para simular alguns produtos, principalmente os negociados no mercado interno, foi utilizado o banco de dados próprio da empresa em questão, para efeito de cálculo de volatilidades e arrasto (ou tendência).

O período histórico analisado foi de janeiro de 1999 até dezembro de 2004, totalizando uma amostra de 72 meses de cotações. A única exceção é a commodity referente ao produto Petróleo Pesado, cujo histórico do banco de

dados inicia-se somente a partir de janeiro de 2002, totalizando assim uma amostra de 36 meses de cotações..

O escopo deste trabalho é a comparação dos dois modelos de simulação detalhados na seção 2, e os efeitos de seus *outputs* quando aplicados no cálculo do CFaR da empresa em questão. Assim não cabe o detalhamento nem explicitação das contas de fluxo de caixa, sendo suficiente somente saber que estas foram as mesmas para ambas simulações. Em outras palavras, serão utilizados os mesmos valores aleatórios gerados para cada modelo de simulação, e os resultados utilizados para calcular o CFaR da mesma maneira para ambos resultados, comparando-se assim cada CFaR gerado a partir de cada preço simulado por métodos diferentes.

Os modelos de simulação utilizados para gerar os preços das commodities para cálculo do CFaR serão os modelos apresentados na seção do "Referencial Teórico": Simulação de Monte Carlo (utilizando a Amostragem Aleatória Simples e o modelo geométrico browniano) e a Simulação de Reversão à Média de Ornstein-Uhlenbeck. Será utilizado o nível de confiança: de 95% para cálculo do CFaR.

3.3 Coleta de dados

Para o cálculo dos parâmetros de entrada dos modelos utilizados serão necessários os dados históricos das 15 commodities citadas na tabela 5 e de um gerador de números aleatórios.

Os dados históricos foram coletados no banco de dados interno da empresa e do provedor de informações de mercado Platts como valores de fechamento mensal, conforme a tabela 5. Na geração dos valores aleatórios será utilizado o gerador do *software* Excel XP.

3.4 Estimação de parâmetros

Os modelos de simulação propostos baseiam-se na estimação de alguns parâmetros. Esta seção tem como objetivo esclarecer a forma de estimação e os dados utilizados.

Para ambos os modelos a volatilidade será estimada pelo desvio-padrão dos retornos mensais da série histórica de preços para cada commodity. Foram utilizados somente os retornos dos últimos 20 meses.

A geração dos valores aleatórios nas simulações leva em consideração a correlação entre as 15 commodities conforme tabela abaixo, fazendo uso da fatoração de Cholesky, conforme seção 2.4.2.1

	Diesel	GLP	Gasolina	Nafta	OC	QAV	QAV	Nafta	Gasolina	Diesel	OC	GLP	Brent	Marlim	Marine Fuel
	MI	MI	MI	MI	MI	MI	ME	ME	ME	ME	ME	ME	ME	ME	ME
Diesel MI	100%														
GLP MI	96%	100%													
Gasolina MI	96%	92%	100%												
Nafta MI	48%	38%	50%	100%											
OC MI	73%	67%	65%	38%	100%										
QAV MI	69%	62%	67%	72%	71%	100%									
QAV ME	-11%	-18%	-9%	0%	4%	-8%	100%								
Nafta ME	4%	-4%	3%	5%	18%	11%	86%	100%							
Gasolina ME	-16%	-16%	-12%	-3%	4%	-5%	68%	63%	100%						
Diesel ME	-6%	-14%	-6%	4%	7%	-6%	99%	86%	66%	100%					
OC ME	-3%	-8%	-2%	21%	1%	7%	74%	75%	71%	78%	100%				
GLP ME	-1%	-6%	1%	4%	13%	6%	78%	74%	56%	81%	73%	100%			
Brent ME	-5%	-10%	-2%	-11%	10%	-2%	85%	91%	69%	83%	73%	67%	100%		
Marlim ME	-3%	-10%	0%	-14%	6%	-11%	86%	86%	63%	84%	69%	66%	92%	100%	
Marine Fuel ME	9%	1%	10%	17%	21%	16%	64%	74%	57%	65%	79%	54%	72%	74%	100%

Tabela 6 - Correlações

Para o Modelo de Reversão à Média, é necessário estimar o parâmetro \bar{x} , o patamar de equilíbrio de longo prazo, e o parâmetro h , a velocidade da força de reversão. O primeiro foi estimado com base nas previsões de longo prazo do departamento estratégico interno da empresa, e o segundo foi estimado aplicando-se a equação 2.28.

Para o Modelo Geométrico Browniano é necessário somente estimar o parâmetro a , (arrasto ou tendência). Para isso basta utilizar os valores históricos de cada commodity e aplicar a equação a seguir:

$$avg(\ln_{(P)} - \ln_{(P-1)}) = \left(\mathbf{a} - \frac{\mathbf{s}^2}{2} \right) \quad (3.1)$$

Onde $avg(\ln_{(P)} - \ln_{(P-1)})$ é a média das diferenças logarítmicas entre cada intervalo de tempo.

3.5 Tratamento dos dados

As sub-rotinas para simulação das trajetórias dos preços das commodities serão desenvolvidas utilizando-se o *software* @Risk 4.5 para Excel. A geração dos valores aleatórios correlacionados será desenvolvida em linguagem de programação no *software* Excel XP utilizando-se o suplemento (*add-in*) Cholesky.xll desenvolvido pelo grupo RiskSRV. E o cálculo do vetor de FCFs para cada cenário simulado e conseqüente cálculo do CFaR será feito utilizando-se o modelo em Excel desenvolvido pela renomada consultoria internacional.

3.6 Limitações

Este trabalho apresenta algumas limitações relativas às metodologias e ferramentas computacionais utilizadas. A seção está dividida nestas duas partes.

3.6.1 Limitações Metodológicas

A metodologia exploratória apresenta a limitação da ausência de generalização dos resultados obtidos. Normalmente, os experimentos são casos específicos ou que despertam o interesse do pesquisador. As conclusões obtidas neste trabalho só podem ser aplicadas, com segurança, nos dados aqui analisados.

3.6.2 Limitações de *Hardware* e *Software*

A simulação é uma técnica que necessita de intenso uso do ferramental computacional, tanto *hardware* (importante no processamento) como *software* (importante na programação das sub-rotinas). No início do uso das técnicas de simulação de Monte Carlo, década de 40, a pequena disponibilidade de recursos computacionais era a principal limitação do método. Porém, cada vez mais este fator deixa de ser um limitante para a utilização da simulação.

A precisão de um processo de simulação é dependente da quantidade de simulações executadas, ou seja, do número de repetições do experimento ou cálculo. Assim, o *hardware* utilizado pode representar uma limitação, uma vez que quanto mais repetições, maior será o consumo deste recurso.

Quanto às limitações do *software*, pode-se citar as limitações "físicas" de dados do Excel (2^{16} linhas por 2^8 colunas), e *buggs* de algumas funções, todas contornadas ao longo deste trabalho. Além disso, apesar do *software* ser bastante conhecido, são poucas os usuários que sabem utilizá-lo com macros e sub-rotinas de Visual Basic, o que dificulta o entendimento de processos e fórmulas mais complexas.

4. Resultados

4.1 Análise Exploratória dos Dados

Antes de iniciar os cálculos do CFaR, é importante fazer uma análise descritiva das séries de dados utilizadas no experimento. As figuras a seguir mostrarão a evolução dos preços (em US\$/Bbl) de cada uma das 15 commodities descritas na tabela 5, assim como a evolução das respectivas volatilidades (utilizando uma janela móvel de 20 meses). Além disso, apresenta-se também os histogramas dos preços e dos retornos.

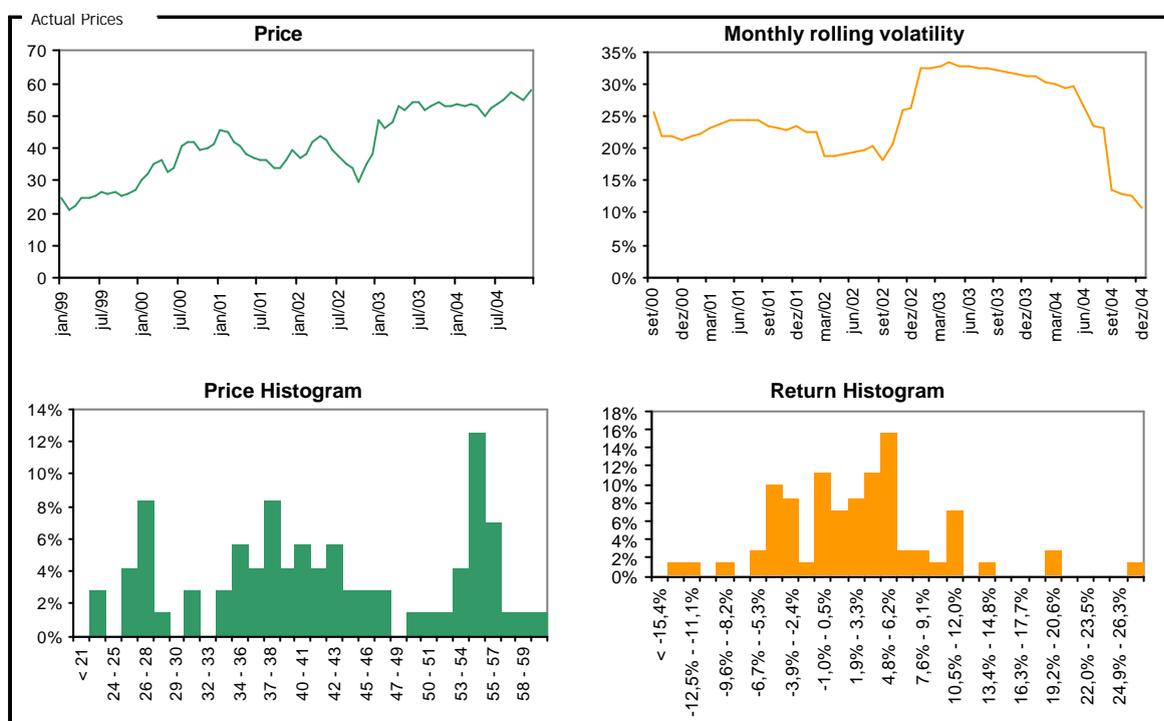


Figura 9 - Diesel MI

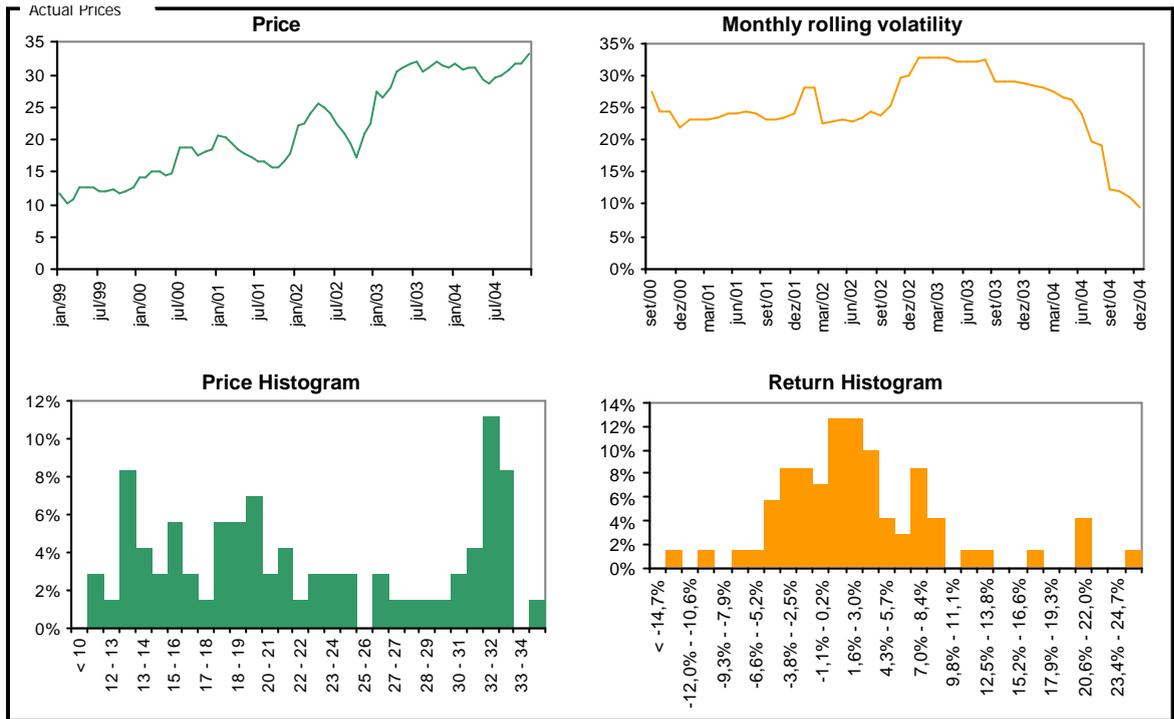


Figura 10 - GLP MI

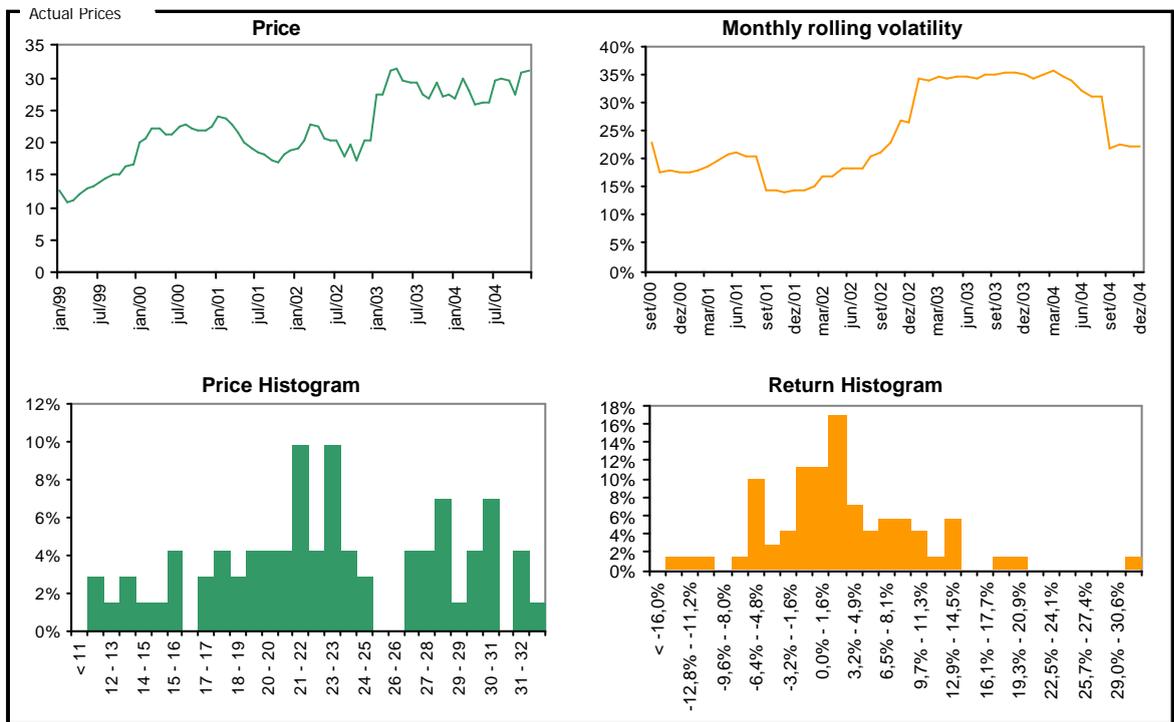


Figura 11 - OC MI

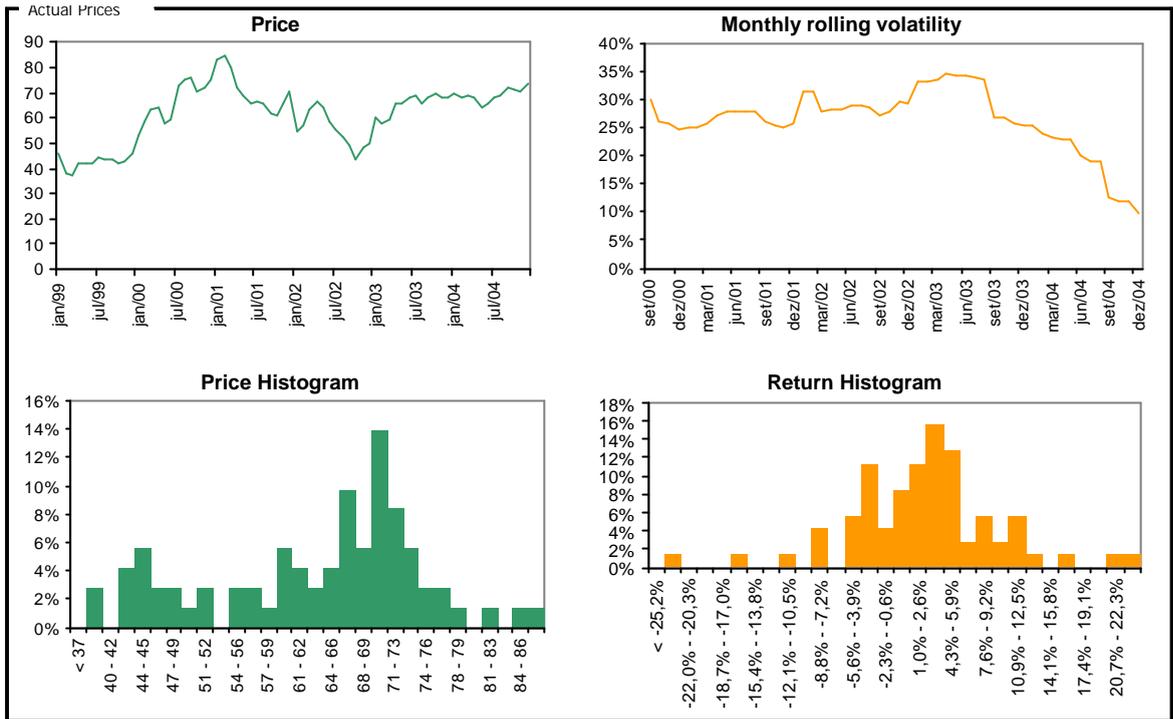


Figura 12 - Gasolina MI

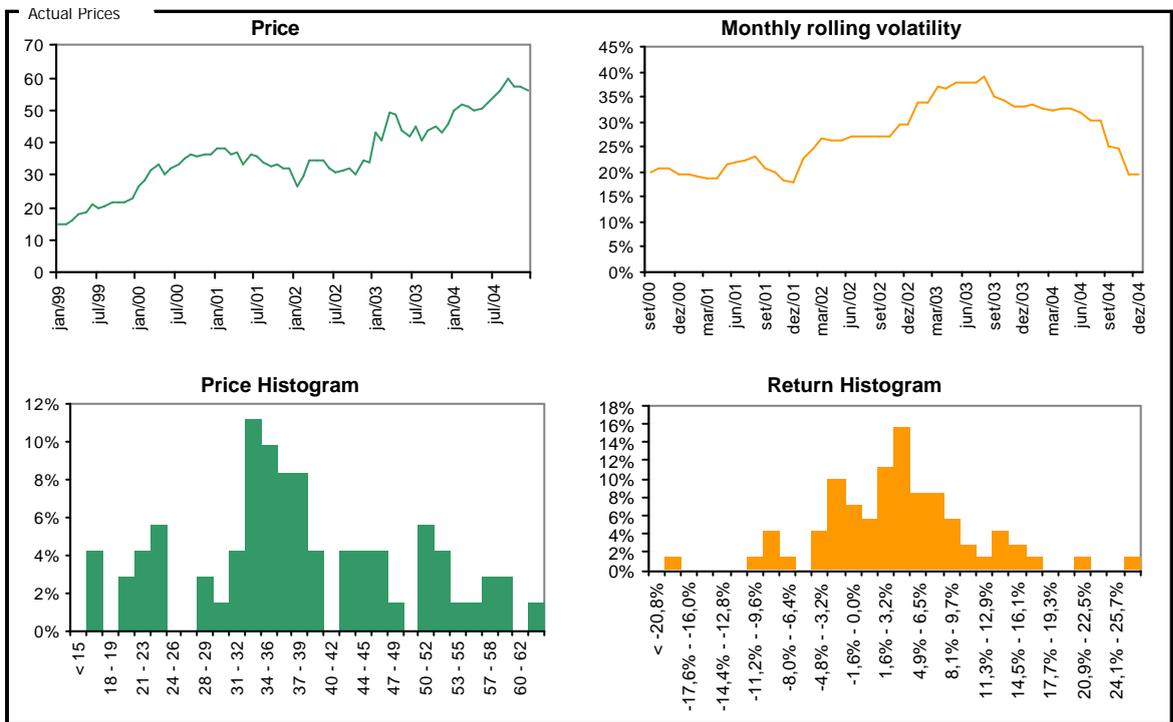


Figura 13 - QAV MI

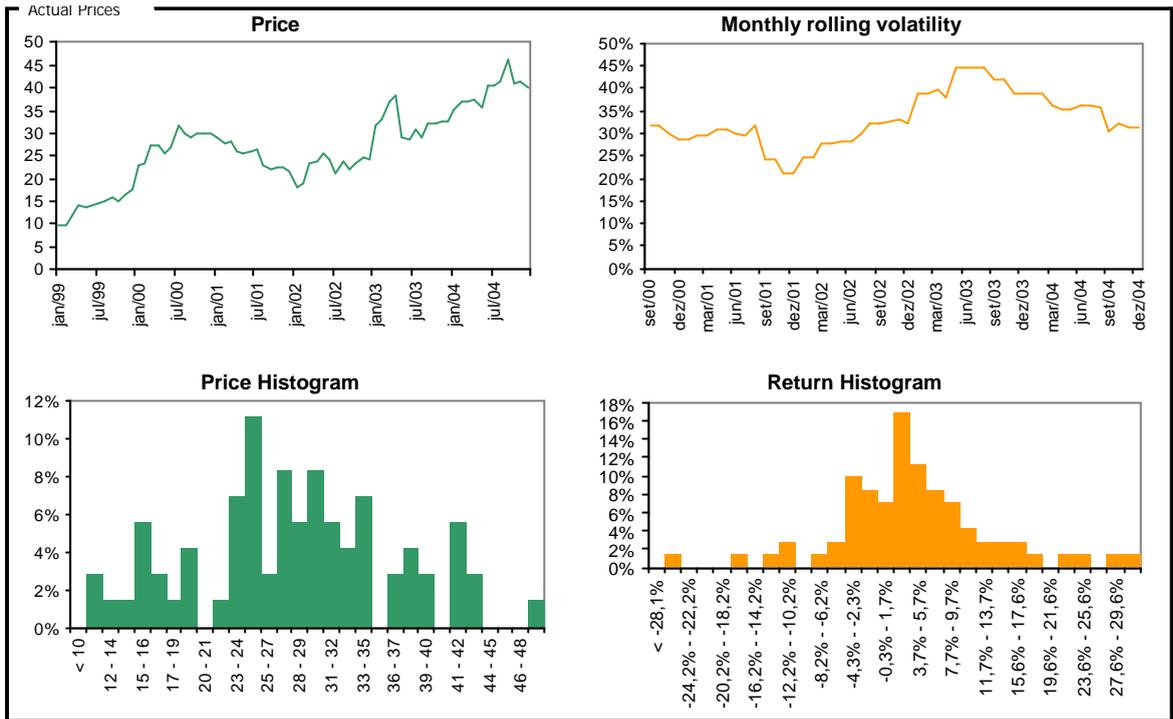


Figura 14 - Nafta MI

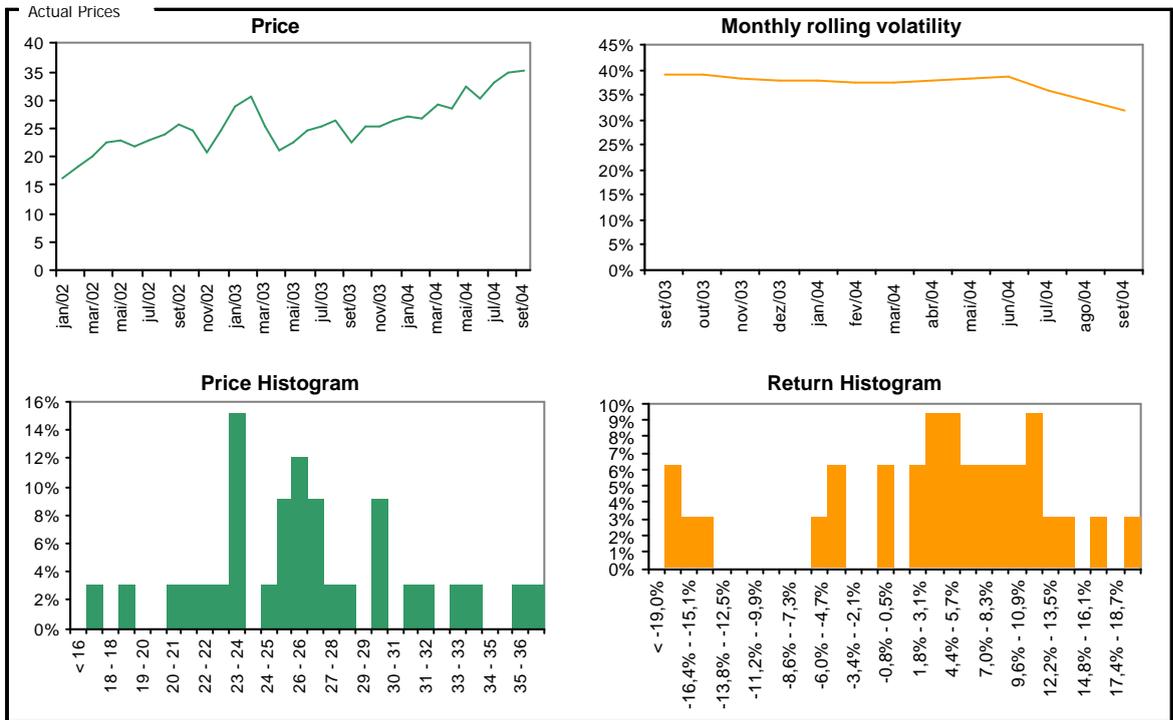


Figura 15 - Marlim ME

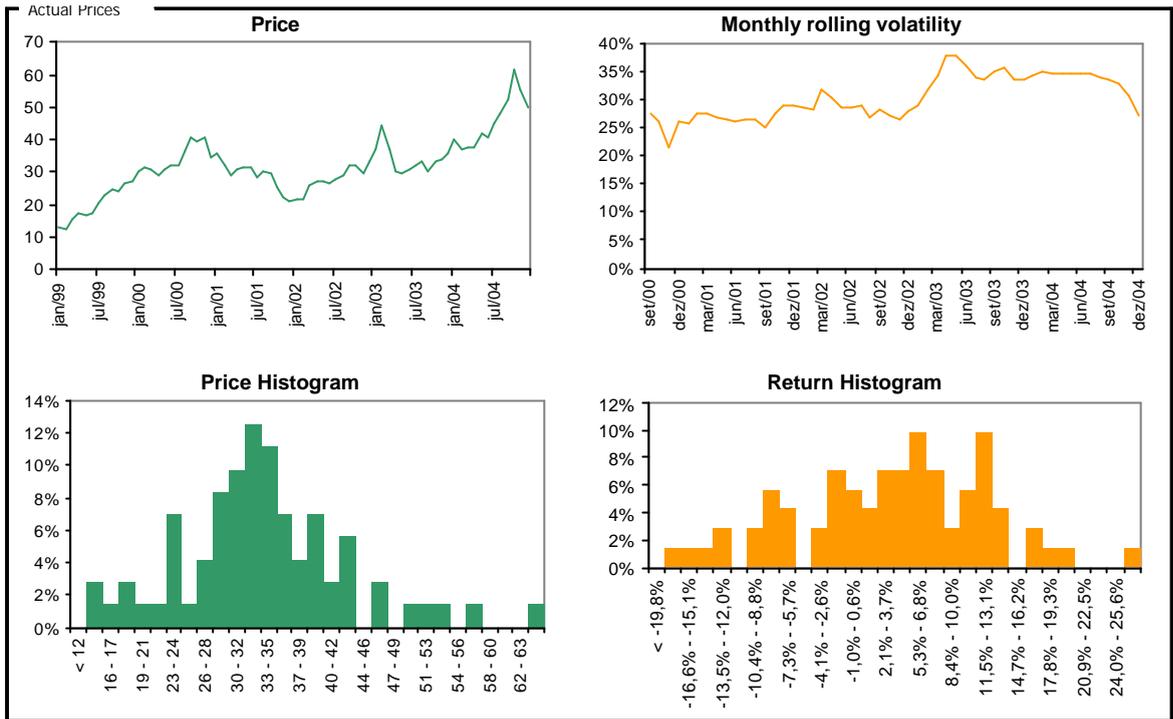


Figura 16 - Diesel ME

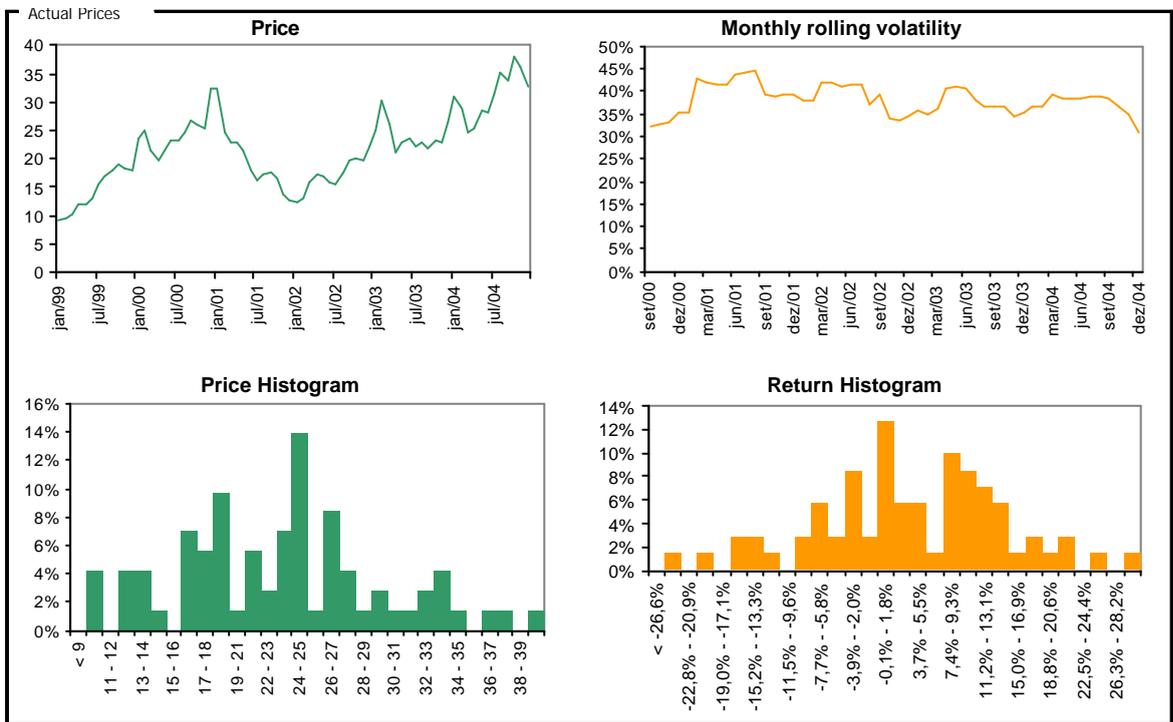


Figura 17 - GLP ME

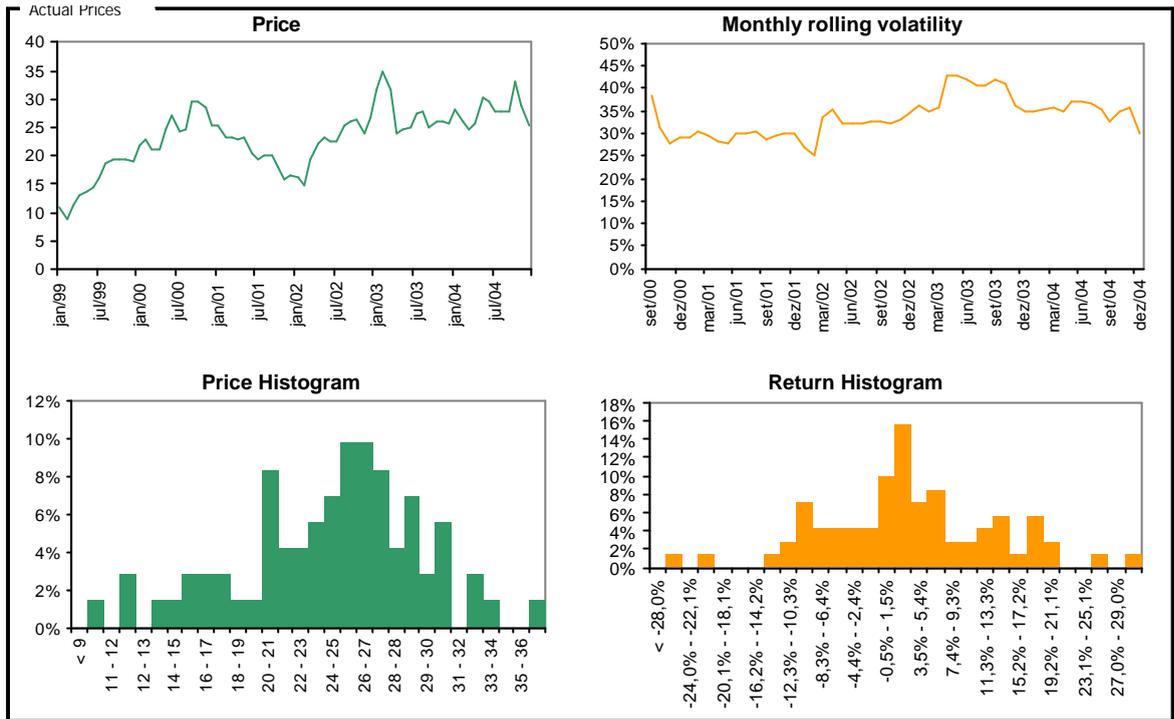


Figura 18 - OC ME

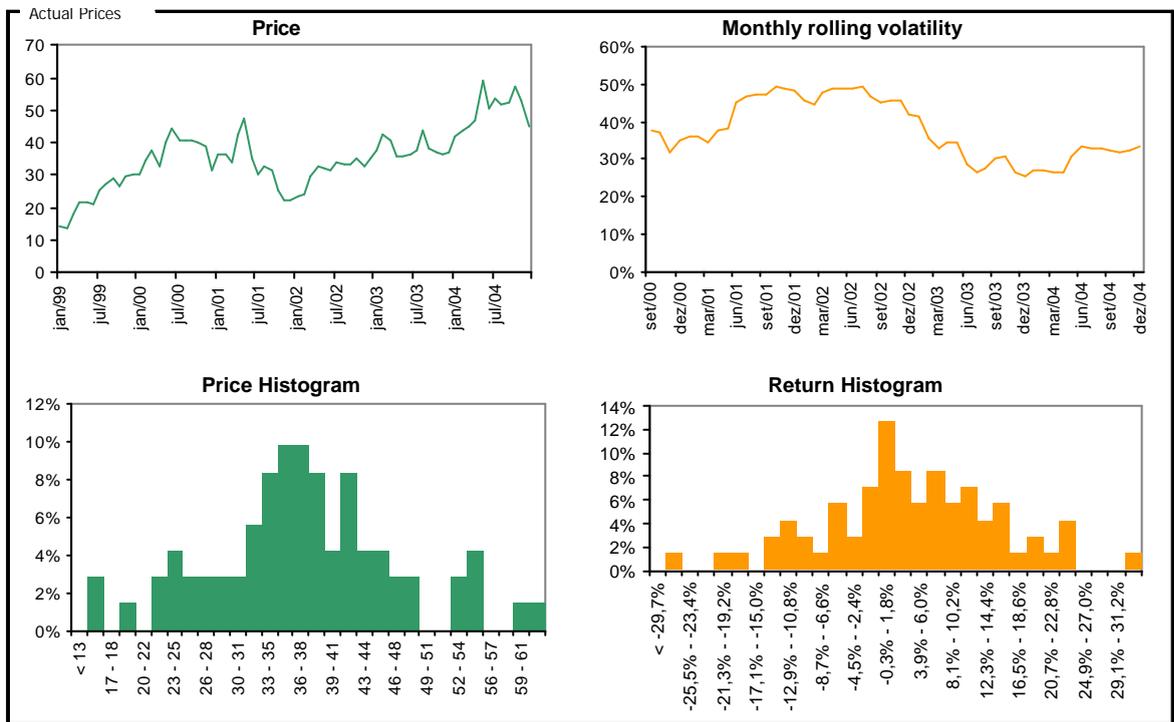


Figura 19 - Gasolina ME

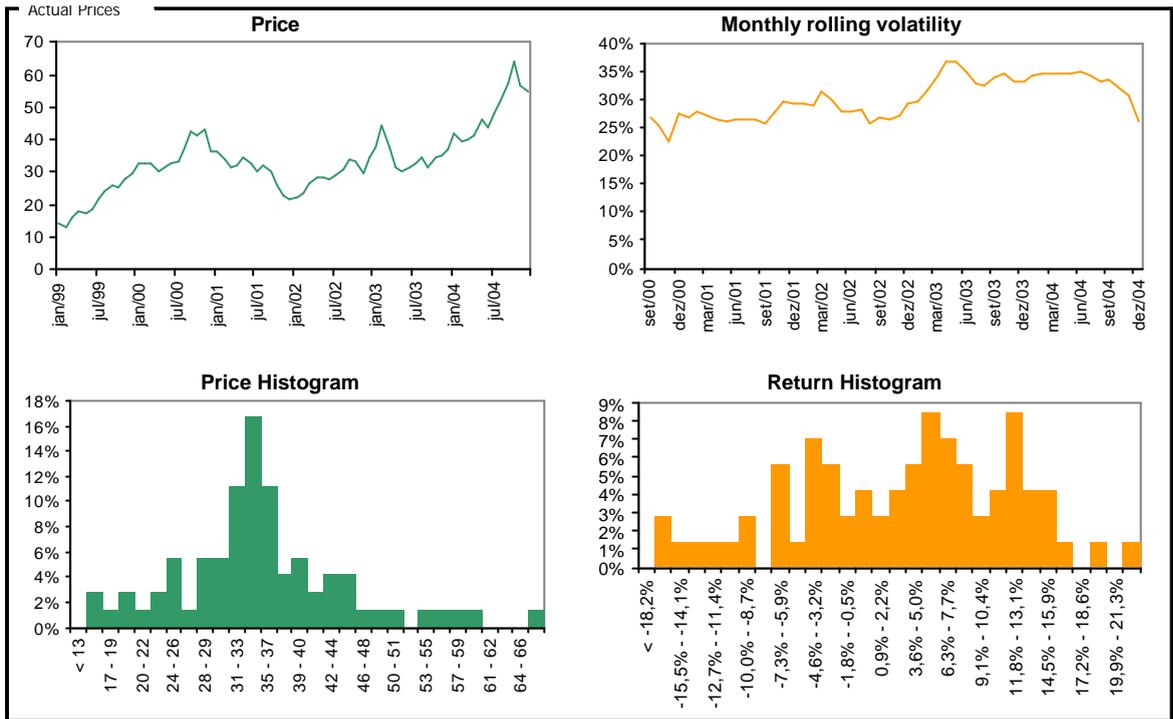


Figura 20 -QAV ME

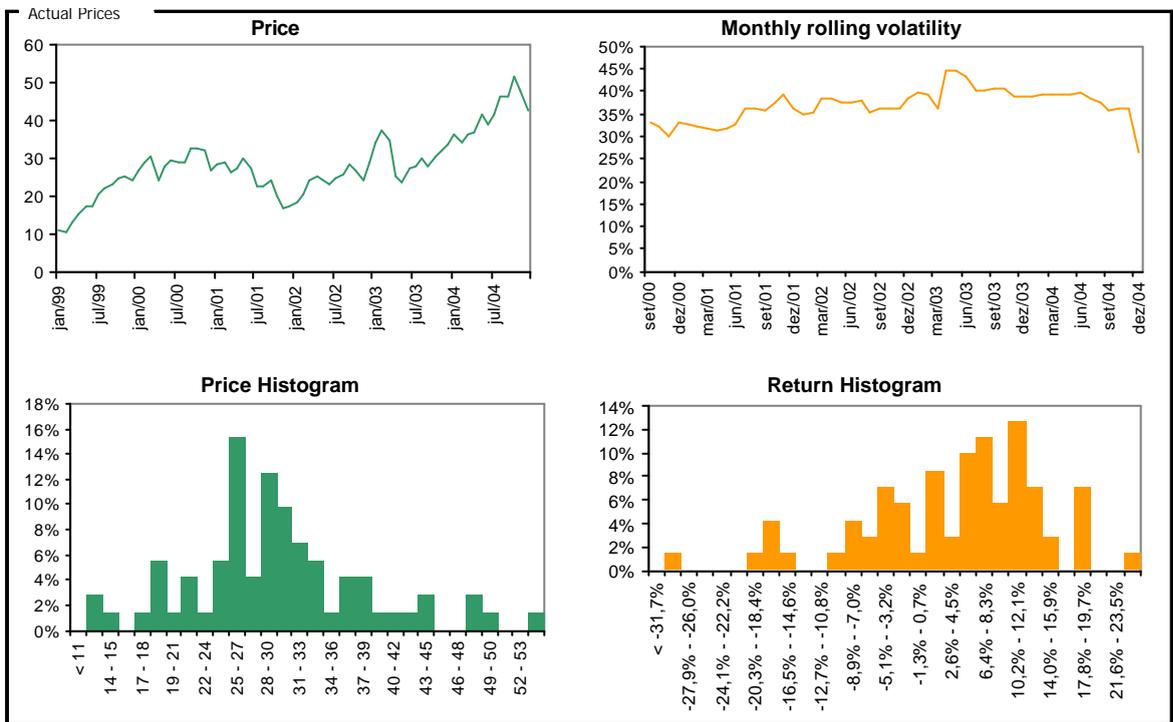


Figura 21 - Nafta ME

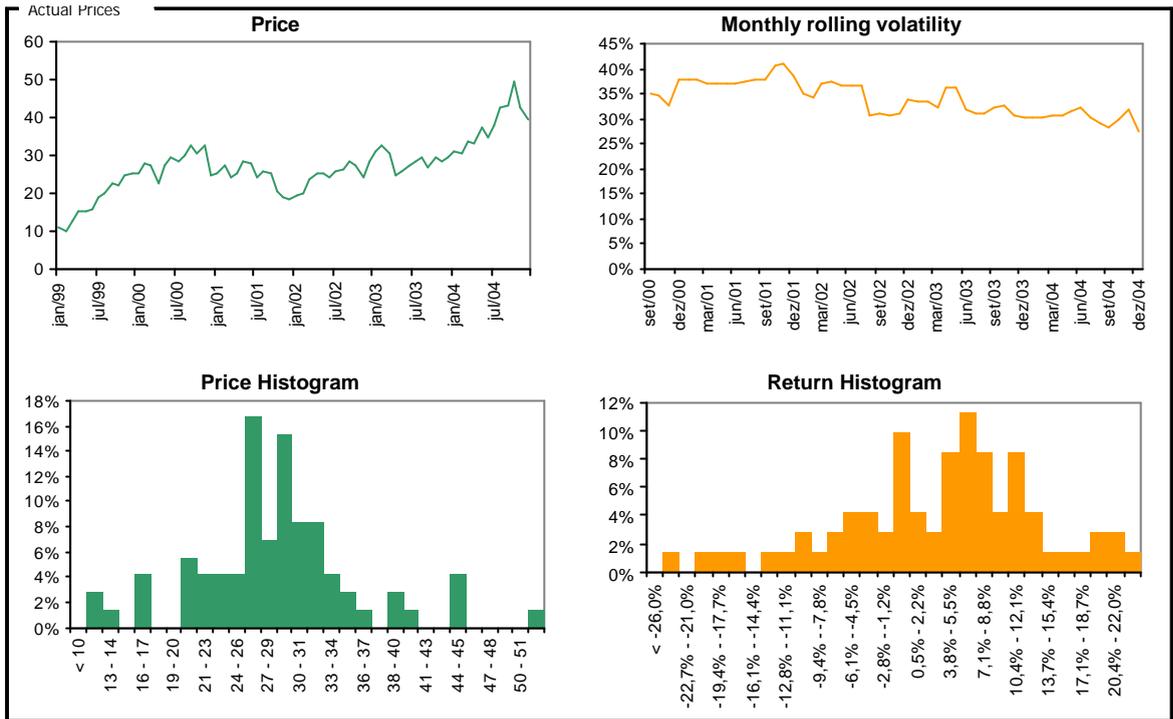


Figura 22 - Brent ME

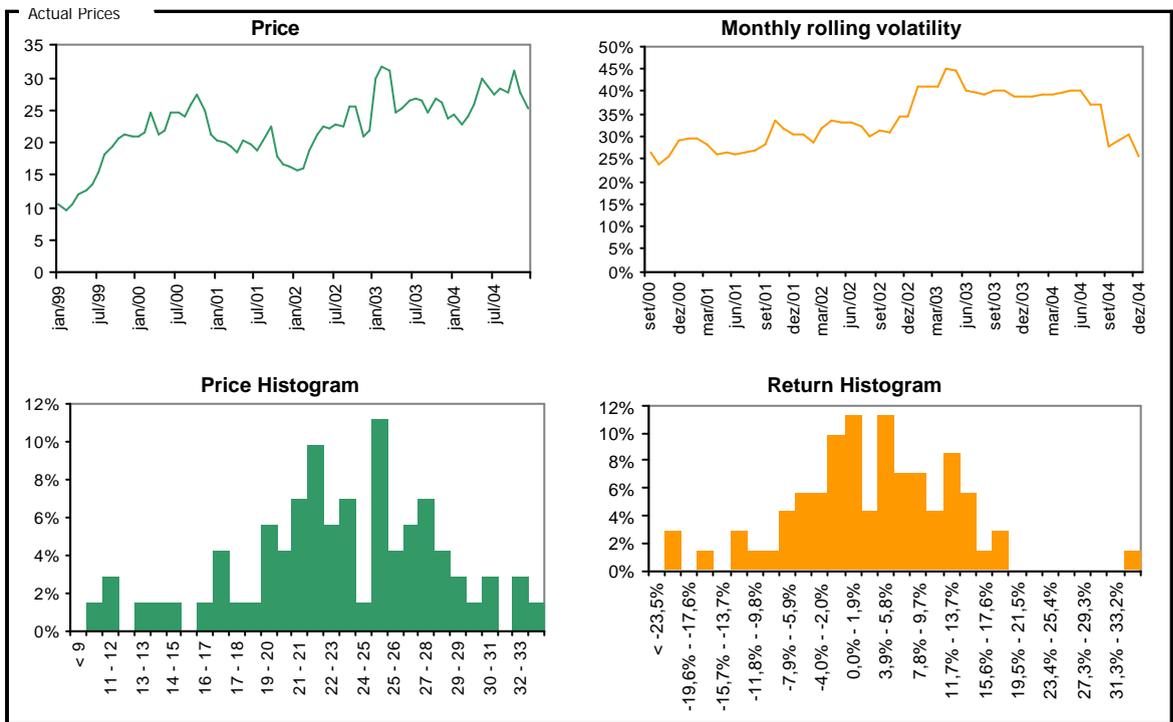


Figura 23 - Marine Fuel ME

As figuras 9 à 23 mostram a trajetória das 15 commodities analisadas. É válido notar que todas apresentam retornos positivos no período analisado, com trajetórias de alta bem definidas e correlatas.

É interessante notar também que a volatilidade para os produtos com negociação em bolsa no mercado externo é maior do que a volatilidade dos produtos referentes ao mercado interno da empresa, como pode ser verificado na figura abaixo:

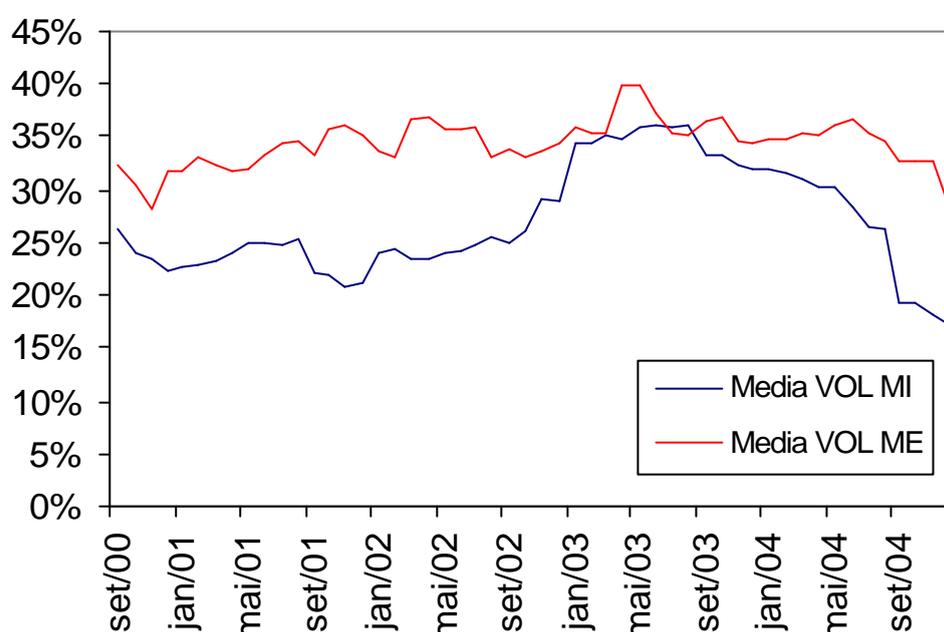


Figura 24 - Média VOL ME x Média VOL MI

Abaixo segue a tabela resumo com as estatísticas descritivas das séries de retornos das 15 commodities utilizadas (descritas na tabela 5).

	Diesel MI	GLP MI	Gasolina MI	Nafta MI	OC MI	QAV MI	QAV ME	Nafta ME	Gasolina ME	Diesel ME	OC ME	GLP ME	Brent ME	Marlim ME	Marine Fuel ME
Observações	71	71	71	71	71	71	71	71	71	71	71	71	71	35	71
Média	1,20%	1,46%	0,68%	2,02%	1,26%	1,90%	1,91%	1,89%	1,60%	1,87%	1,17%	1,80%	1,79%	1,89%	1,26%
Mínimo	-15,37%	-14,72%	-25,24%	-28,14%	-16,04%	-20,76%	-18,19%	-31,70%	-29,69%	-19,77%	-27,97%	-26,55%	-26,01%	-18,95%	-23,52%
Máximo	24,91%	23,36%	20,69%	27,59%	28,96%	24,06%	19,95%	21,58%	29,07%	24,04%	27,02%	26,31%	20,38%	17,35%	31,26%
Desvio padrão	6,90%	7,01%	7,48%	9,40%	7,44%	7,41%	8,88%	10,40%	11,21%	9,06%	10,33%	10,74%	9,95%	9,82%	9,47%
Curtose	1,885	1,892	2,088	1,775	2,107	1,403	-0,519	0,800	0,349	-0,146	0,447	0,002	0,389	-0,131	1,134
Assimetria	0,702	1,014	-0,269	0,112	0,752	0,143	-0,370	-0,835	-0,178	-0,246	0,007	-0,218	-0,540	-0,805	-0,122

Tabela 7 - Estatísticas descritivas das séries de retornos das commodities

Vale lembrar que todas as commodities foram observadas de janeiro de 1999 à dezembro 2004, com exceção da commodity para o produto Marlim ME, onde só existe registro histórico a partir de janeiro de 2002.

Interessante perceber que nenhuma commodity apresenta média de retornos negativa, sendo a Gasolina MI a menor média de retornos com 0.68% e a Nafta MI a maior, com 2.02%. O menor retorno mensal percebido durante o período analisado é da Nafta ME, com -31.70% e o maior retorno mensal é do produto Marine Fuel ME, com 31.26%.

Quanto ao desvio-padrão, pode-se afirmar que o produto Gasolina ME apresentou o maior valor (11,21%), assim como na amplitude. É importante perceber que todas as séries de retornos apresentaram assimetrias tanto negativas como positivas e excesso de curtose positivo (somente 3 séries apresentaram excesso de curtose negativo: QAV ME, Diesel ME e Marlim ME), indicando, principalmente, a presença de valores extremos. Sua principal consequência seria a possível subestimação do risco incorrido se calculado sob a suposição de Normalidade.

4.2 Análise das simulações de CFaR

Nesta seção, apresenta-se o resultado do cálculo do CFaR utilizando os valores simulados para as 15 commodities pelos dois métodos apresentados: Movimento Geométrico Browniano e Movimento de Reversão à Média de Ornstein-Uhlenbeck. Estes resultados serão analisados em conjunto com as estatísticas descritivas apresentadas na seção anterior.

Foram realizadas 30 corridas de 1.000 simulações cada para cada um dos 15 produtos, e então calculados os Fluxos de Caixa baseados nesses cenários simulados. As tabelas abaixo resumem cada corrida realizada para cada método utilizado.

Corrida Estatísticas	FCs Simulado pelo Movimento Geométrico Browniano (US\$)									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Min	6.879.803	7.176.183	7.253.017	6.305.361	6.834.661	6.369.853	7.502.756	7.170.190	7.337.570	7.867.146
Mean	15.510.074	15.599.437	15.606.383	15.557.330	15.513.617	15.614.700	15.857.368	15.667.592	15.622.109	15.555.205
Max	28.583.584	29.378.681	28.699.799	27.366.975	28.545.944	30.164.872	28.328.976	27.952.908	31.995.854	26.625.471
Stdev	3.283.660	3.316.611	3.416.587	3.370.973	3.430.689	3.349.242	3.487.938	3.374.616	3.360.359	3.296.600
Skew	0,52	0,52	0,54	0,29	0,46	0,51	0,51	0,39	0,58	0,43
Kurt	0,58	0,43	0,35	0,17	0,10	0,29	0,14	0,03	0,87	0,16
FCO@Risk	4.849.830	4.846.305	4.985.301	5.111.973	5.115.448	4.987.619	5.213.533	5.124.904	4.981.188	4.849.465
95%										
StDev/Mean	21,2%	21,3%	21,9%	21,7%	22,1%	21,4%	22,0%	21,5%	21,5%	21,2%

Corrida Estatísticas	FCs Simulado pelo Movimento Geométrico Browniano (US\$)									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Min	6.680.430	7.277.848	7.384.352	7.396.861	6.687.551	7.333.542	7.522.893	5.873.235	7.283.596	4.970.686
Mean	15.521.739	15.713.069	15.857.762	15.652.221	15.454.240	15.463.269	15.792.465	15.636.923	15.617.176	15.595.056
Max	26.617.959	29.788.369	26.868.268	29.184.490	29.487.083	27.972.840	28.685.367	30.244.344	29.282.886	34.540.716
Stdev	3.504.775	3.410.669	3.391.856	3.408.278	3.564.932	3.428.989	3.496.973	3.547.548	3.385.437	3.401.458
Skew	0,31	0,53	0,39	0,41	0,42	0,51	0,41	0,55	0,48	0,68
Kurt	-0,13	0,64	0,01	0,12	0,31	0,23	0,02	0,62	0,43	1,48
FCO@Risk	5.338.716	4.967.162	4.992.378	5.193.267	5.515.556	5.061.127	5.182.762	5.337.494	5.142.673	4.781.373
95%										
StDev/Mean	22,6%	21,7%	21,4%	21,8%	23,1%	22,2%	22,1%	22,7%	21,7%	21,8%

Corrida Estatísticas	FCs Simulado pelo Movimento Geométrico Browniano									
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Min	7.019.673	7.725.914	7.184.556	7.698.063	7.079.746	7.274.303	7.579.649	5.840.993	7.086.850	6.464.928
Mean	15.730.331	15.503.216	15.641.270	15.657.612	15.488.634	15.626.268	15.638.694	15.715.264	15.706.839	15.615.736
Max	29.062.858	29.878.714	30.181.037	31.496.972	28.218.352	30.986.456	28.602.988	29.616.228	34.082.390	29.621.888
Stdev	3.459.181	3.440.389	3.475.489	3.474.899	3.202.177	3.294.098	3.369.065	3.539.761	3.590.158	3.398.578
Skew	0,50	0,63	0,55	0,55	0,41	0,48	0,49	0,45	0,61	0,58
Kurt	0,56	0,77	0,53	0,49	0,25	0,43	0,22	0,39	0,75	0,48
FCO@Risk	5.216.592	5.067.501	5.036.208	5.186.599	4.871.377	4.843.171	4.810.459	5.395.938	5.065.867	4.805.615
95%										
StDev/Mean	22,0%	22,2%	22,2%	22,2%	20,7%	21,1%	21,5%	22,5%	22,9%	21,8%

Tabela 8 - Resumos Estatísticos dos Fluxos de Caixa gerados das 30 corridas realizadas utilizando o Movimento Geométrico Browniano

Corrida Estatísticas	FCs Simulados pelo Movimento de Reversão à Média (US\$)									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Min	9.049.179	9.217.522	9.433.054	8.851.911	8.987.080	8.934.478	9.688.152	9.384.268	9.542.023	9.428.737
Mean	14.732.534	14.790.751	14.798.114	14.746.054	14.742.443	14.800.492	14.930.011	14.822.170	14.797.615	14.763.867
Max	21.646.125	22.146.037	21.463.551	21.090.786	22.869.161	22.607.721	21.814.659	21.606.161	23.609.667	21.314.040
Stdev	1.946.631	1.979.153	2.017.114	2.018.591	2.041.407	1.994.575	2.070.436	2.001.869	1.985.573	1.975.526
Skew	0,31	0,31	0,37	0,12	0,30	0,33	0,32	0,21	0,41	0,27
Kurt	0,31	0,11	0,17	0,10	-0,02	0,08	-0,08	-0,12	0,43	0,03
FCO@Risk	2.976.248	2.993.292	3.057.063	3.158.941	3.065.190	3.083.490	3.184.754	3.138.361	3.082.588	3.076.560
95%										
StDev/Mean	13,2%	13,4%	13,6%	13,7%	13,8%	13,5%	13,9%	13,5%	13,4%	13,4%

Corrida Estatísticas	FCs Simulados pelo Movimento de Reversão à Média (US\$)									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Min	8.418.712	9.644.362	9.367.733	8.769.609	8.677.678	9.358.903	9.701.200	8.456.715	9.127.213	7.865.938
Mean	14.736.043	14.850.287	14.937.263	14.827.385	14.691.845	14.712.408	14.897.183	14.788.403	14.794.862	14.783.465
Max	20.899.594	22.769.478	20.971.646	21.739.979	22.551.944	22.084.188	21.335.176	22.580.097	22.505.315	24.747.004
Stdev	2.091.944	2.007.526	2.009.351	2.018.025	2.132.940	2.035.859	2.052.971	2.104.489	2.005.687	2.013.959
Skew	0,13	0,35	0,23	0,18	0,21	0,35	0,23	0,30	0,29	0,41
Kurt	-0,17	0,30	-0,04	-0,10	0,08	0,07	-0,14	0,32	0,20	0,85
FCO@Risk	3.252.579	3.076.421	2.997.812	3.225.499	3.483.926	3.211.185	3.140.491	3.325.978	3.166.551	2.998.595
95%										
StDev/Mean	14,2%	13,5%	13,5%	13,6%	14,5%	13,8%	13,8%	14,2%	13,6%	13,6%

Corrida Estatísticas	FCs Simulados pelo Movimento de Reversão à Média (US\$)									
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Min	9.177.358	9.275.931	9.520.053	9.615.958	9.474.379	9.561.472	9.679.208	8.512.863	9.387.203	8.937.178
Mean	14.857.717	14.731.064	14.822.899	14.824.056	14.733.743	14.804.006	14.802.149	14.849.487	14.852.266	14.807.794
Max	22.114.101	22.094.448	22.415.069	22.528.490	21.879.062	22.558.967	21.516.759	22.117.055	24.310.452	22.292.492
Stdev	2.058.666	2.035.588	2.043.163	2.049.908	1.908.342	1.936.253	1.999.071	2.100.124	2.101.710	2.013.340
Skew	0,27	0,38	0,35	0,35	0,22	0,28	0,28	0,23	0,39	0,37
Kurt	0,19	0,27	0,22	0,13	0,08	0,03	-0,02	0,10	0,32	0,18
FCO@Risk	3.288.430	3.108.241	2.986.915	3.233.086	3.101.770	2.973.378	3.013.723	3.328.230	3.204.106	2.866.383
95%										
Stdev/Mean	13,9%	13,8%	13,8%	13,8%	13,0%	13,1%	13,5%	14,1%	14,2%	13,6%

Tabela 9 - Resumos Estatísticos dos Fluxos de Caixa gerados das 30 corridas realizadas utilizando o Movimento de Reversão à Média

A seguir, foi calculado as médias das médias dessas 30 corridas, cujas estatísticas descritivas estão resumidas na tabela 10 a seguir:

Estatísticas	MGB	MRM
Min	7.002.074	9.168.202
Mean	15.624.387	14.800.946
Max	29.402.109	22.205.974
Stdev	3.415.733	2.024.993
Skew	0,49	0,29
Kurt	0,39	0,13
FCO@Risk	5.062.580	3.126.659
95%		
Stdev/Mean	21,9%	13,7%

Tabela 10 - Estatísticas descritivas das Médias das Médias dos Fluxos de Caixa gerados a partir das 30 corridas para cada método de simulação

A partir da tabela 10 anterior podemos constatar que existe uma diferença estatística significativa entre os Fluxos de Caixa gerados a partir de simulações pelo Movimento Geométrico Browniano e os Fluxos de Caixa gerados utilizando o Movimento de Reversão à Média. Percebe-se que o desvio padrão pelo MGB é maior que pelo MRM, assim como a amplitude dos resultados obtidos também é maior no MGB. A distribuição gerada pelo MRM tem menor curtose e assimetria, se aproximando mais de uma distribuição Normal do que a do MGB.

Ao analisar-se o Fluxo de Caixa em Risco calculado por cada método, verifica-se que essa diferença estatística é bastante significativa, chegando a gerar valores de quase US\$ 2 milhões de diferença.

Uma outra maneira de verificar se existe diferença estatística entre as duas séries de CFaRs é realizar um teste-t de amostras emparelhadas. Para isso precisa-se criar uma série das diferenças dos fluxos calculados, conforme tabela a seguir.

em US\$ Corrida	MGB		MRM		Media MGB - Media MRM	FCaR.MGB - FCaR.MRM
	Media MGB	FC@Risk.MGB	Media MRM	FC@Risk.MRM		
1	15.510.074	4.849.830	14.732.534	2.976.248	777.540	1.873.582
2	15.599.437	4.846.305	14.790.751	2.993.292	808.686	1.853.013
3	15.606.383	4.985.301	14.798.114	3.057.063	808.269	1.928.238
4	15.557.330	5.111.973	14.746.054	3.158.941	811.276	1.953.032
5	15.513.617	5.115.448	14.742.443	3.065.190	771.174	2.050.257
6	15.614.700	4.987.619	14.800.492	3.083.490	814.208	1.904.130
7	15.857.368	5.213.533	14.930.011	3.184.754	927.357	2.028.778
8	15.667.592	5.124.904	14.822.170	3.138.361	845.422	1.986.543
9	15.622.109	4.981.188	14.797.615	3.082.588	824.494	1.898.600
10	15.555.205	4.849.465	14.763.867	3.076.560	791.338	1.772.906
11	15.521.739	5.338.716	14.736.043	3.252.579	785.696	2.086.137
12	15.713.069	4.967.162	14.850.287	3.076.421	862.782	1.890.742
13	15.857.762	4.992.378	14.937.263	2.997.812	920.499	1.994.566
14	15.652.221	5.193.267	14.827.385	3.225.499	824.836	1.967.769
15	15.454.240	5.515.556	14.691.845	3.483.926	762.396	2.031.630
16	15.463.269	5.061.127	14.712.408	3.211.185	750.861	1.849.942
17	15.792.465	5.182.762	14.897.183	3.140.491	895.282	2.042.272
18	15.636.923	5.337.494	14.788.403	3.325.978	848.521	2.011.516
19	15.617.176	5.142.673	14.794.862	3.166.551	822.314	1.976.122
20	15.595.056	4.781.373	14.783.465	2.998.595	811.592	1.782.778
21	15.730.331	5.216.592	14.857.717	3.288.430	872.614	1.928.163
22	15.503.216	5.067.501	14.731.064	3.108.241	772.152	1.959.260
23	15.641.270	5.036.208	14.822.899	2.986.915	818.371	2.049.293
24	15.657.612	5.186.599	14.824.056	3.233.086	833.556	1.953.513
25	15.488.634	4.871.377	14.733.743	3.101.770	754.891	1.769.607
26	15.626.268	4.843.171	14.804.006	2.973.378	822.262	1.869.793
27	15.638.694	4.810.459	14.802.149	3.013.723	836.545	1.796.735
28	15.715.264	5.395.938	14.849.487	3.328.230	865.776	2.067.708
29	15.706.839	5.065.867	14.852.266	3.204.106	854.573	1.861.761
30	15.615.736	4.805.615	14.807.794	2.866.383	807.942	1.939.232

Tabela 11 - Diferenças dos Fluxos de Caixa pelo MGB e MRM

E então aplicar o teste-t emparelhado para as 2 séries criadas conforme tabela 11 acima. Os resultados obtidos estão expostos logo abaixo.

Paired-sample analysis for MediaMGB minus MediaMRM

Summary measures for MediaMGB-MediaMRM

Sample size	30
Sample mean	823.441
Sample standard deviation	44.800

Confidence interval for mean

Confidence level	95,0%	
Sample mean	823.441	
Std error of mean	8.179	0,99%
Degrees of freedom	29	
Lower limit	806.712	
Upper limit	840.169	

Test of mean=0 versus two-tailed alternative

Hypothesized mean	0,000
Sample mean	823.441
Std error of mean	8.179
Degrees of freedom	29
t-test statistic	100,673
p-value	0,000

Paired-sample analysis for FC@R.MGB minus FC@R.MRM

Summary measures for FC@R.MGB - FC@R.MRM

Sample size	30
Sample mean	1.935.921
Sample standard deviation	90.992

Confidence interval for mean

Confidence level	95,0%	
Sample mean	1.935.921	
Std error of mean	16.613	0,86%
Degrees of freedom	29	
Lower limit	1.901.944	
Upper limit	1.969.898	

Test of mean=0 versus two-tailed alternative

Hypothesized mean	0,000
Sample mean	1.935.921
Std error of mean	16.613
Degrees of freedom	29
t-test statistic	116,532
p-value	0,000

Percebe que em ambos os testes a hipótese nula de igualdade de médias (ou de diferença de médias igual à zero) é rejeita, pois o p-valor é menor que 0.05. Ou seja, pode-se rejeitar a hipótese de igualdade para ambas as séries, tanto para a série de Fluxos de Caixa como para a série de Fluxos de Caixa em Risco. Pode também verificar a robustez do experimento constatando que o erro padrão de cada série é menor que 1%.

Uma outra maneira de verificar a robustez das séries é calcular a correlação entre elas, verificando-se assim a consistência das simulações e variáveis aleatórias empregadas.

Table of correlations

	MediaMGB	FC@R.MGB	StDev/Media MGB	MediaMRM	FC@R.MRM	Stdev/Media MRM
MediaMGB	100,00%					
FC@R.MGB	9,58%	100,00%				
StDev/Media MGB	2,44%	75,87%	100,00%			
MediaMRM	99,20%	3,60%	-1,71%	100,00%		
FC@R.MRM	-4,39%	90,03%	67,48%	-10,86%	100,00%	
Stdev/Media MRM	2,25%	81,41%	97,69%	-3,15%	73,95%	100,00%

Tabela 12 - Correlação entre as séries de Fluxos de Caixa e FCaR geradas por MGB e MRM

A tabela 12 acima mostra, em destaque, a correlação entre as séries de Fluxo de Caixa, FCaR e erro padrão geradas pelos dois métodos de simulação mencionados. Percebe-se a alta correlação entre as séries oriundas de cada método de simulação diferente, provando assim a consistência das variáveis aleatórias empregadas e do experimento realizado.

5. Conclusões

Através dos resultados apresentados, pode -se concluir, primeiramente, que os modelos propostos nesse trabalho, a simulação de Monte Carlo com Amostragem Aleatória Simples utilizando-se o Movimento Geométrico Browniano e o Movimento de Reversão à Média de Ornstein-Uhlenbeck, são capazes de realizar as simulações necessárias para os cálculos para o CFaR a partir de um portfólio composto por 15 commodities. A estimação e implementação dos modelos foi bastante simples, não representando limitação quanto aos métodos.

Percebeu-se que existe diferença significativa quanto ao método aplicado. Ou seja. o Movimento de Reversão à Média apresentou menor variância comprovada pelo menor desvio padrão e menor amplitude de resultados apresentados.

Como a motivação deste trabalho foi verificar se a inserção de parâmetros na simulação do CFaR, de tal forma à levar em consideração as leis econômicas de oferta e demanda, realmente tem alguma relevância significativa na distribuição de frequência resultante, quando comparada com a distribuição de frequências resultante de um processo estocástico simples, pode-se concluir que para este determinado experimento, existe sim uma diferença estatística significativa nas séries de CFaR geradas e estes resultados são de grande valia.

Por este trabalho se concentrar no risco financeiro, mais especificamente no risco de mercado e levando em conta que o principal motivo para o surgimento da administração de risco é a volatilidade das variáveis financeiras, os instrumentos e derivativos existem em virtude da imprevisibilidade dos preços dos ativos em uma economia. Se estes fossem previsíveis, não haveria risco, e não haveria necessidade de proteção

(hedge). As operações envolvendo derivativos existem fundamentalmente em função do caráter aleatório dos preços e retornos dos ativos.

Assim, uma sugestão para futuras pesquisas seria um melhor tratamento das amostragens e valores de entrada das simulações realizadas, como a utilização da amostragem descritiva por exemplo, afim de testar a redução da variabilidade dos resultados e do tempo de processamento.

Além disso, quando a simulação é utilizada, o tempo de processamento é um importante ponto a ser discutido. Porém nenhum dos dois métodos utilizados apresentou vantagem superior nesse quesito. Vale destacar que com o rápido avanço tecnológico, as limitações provenientes dos recursos computacionais são cada vez menos relevantes.

Em resumo, as principais dificuldades entre os dois métodos propostos era a complexidade da estimação dos parâmetros de entrada para o Movimento de Reversão à Média quando comparado com os parâmetros de entrada do Movimento Geométrico Browniano, e a intensa utilização de recursos computacionais nos modelos de simulação. Foi verificado neste trabalho a importância de uma boa estimação de parâmetros para o MRM, sendo bem recompensada devido a diferença estatística significativa entre um método e outro.

Quanto a segunda dificuldade, ela poderia ser minimizada pela incorporação das técnicas de redução de variância na modelagem básica de simulação de Monte Carlo. A escolha da metodologia de cálculo do CFaR mais adequada dependerá das características dos ativos que compõem o portfólio.

6. Referências Bibliográficas

BANKS, J.; CARSON, J.S.; NELSON, B.N. **Discrete-Event System Simulation**. 2nd Edition, Upper Saddle River: Prentice Hall, 1996.

BERNSTEIN, P.L. **Desafio aos Deuses: A Fascinante História do Risco**. 3.ed. São Paulo : Editora Campus, 1985.

BOX, G. E. P; MULLER, M. E. **A Note on the Generation of Random Normal Deviates**. Annals Math. Stat., 1958.

BOYLE, P. **Options: A Monte Carlo Approach**. Journal of Financial Economics, 4, 1977.

_____ ; BROADIE, M.; GLASSERMAN, P. **Monte Carlo Methods for Security Pricing**. Journal of Economic Dynamics and Control, 21, 1997.

BRATLEY, P.; FOX, B.; SCHRAGE, L. **A Guide to Simulation**, Nova Iorque: Springer-Verlag, 2 Ed., 1983.

BREALEY, R; MYERS, S. **Principles of Corporate Finance**. McGraw Hill, Nova York, 1981.

CAMPBELL, J.Y.; LO, A.W.; MACKINLAY, A. **The Econometrics of Financial Markets**, Princetown University Press, New Jersey, 1997.

CÁRDENAS, J.; FRUCHARD, E.; PICRON J.F.; REYES, C.; WALTERS, K.; YANG, W. Monte Carlo within a day. **Risk**, fev. 1999.

COELHO, F.H.S. **Avaliação de opções exóticas por Simulação de Monte Carlo com Técnicas de Redução de Variância**. 2004. 105f. Dissertação (Mestrado) - Instituto COPPEAD de Administração, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2004.

DAVIDSON, C. **Turbo-charged models**. RISK magazine, Feb 2002.

DIAS, M.A.G. **Real Options Approach to Petroleum Investments.**

Disponível em <http://sphere.rdc.puc-rio.br/marco.ind/stochast.html> Acesso em janeiro, 2006.

FORTUNA, E **Mercado Financeiro Produtos e Serviços.** 13.ed. Rio de Janeiro : QualityMark Ed., 1999.

GARMAN, M. Improving on VaR. **Risk**, v. 9, n. 5, mai. 1996.

HAMMERLEY, J.M.; HANDSCOMB, D.C. **Monte Carlo methods.** Wiley press, 1964.

HULL, J. **Options, Futures and Other Derivatives.** Nova Iorque: Prentice-Hall, 2003.

IMAN, R.; CONOVER, W. A distribution free approach to inducing correlation rank among input variables. **Communications in Statistics** , v. 11, n. 3, 1982.

INGALLS, R. Introduction to simulation. **Winter Simulation Conference** , 2002.

J. P. MORGAN REUTERS. **Technical Document.** Nova Iorque: 1996.

JORION, P. **Value at Risk:** A nova fonte de referência para o controle do risco de mercado. São Paulo: Bolsa de Mercadorias e Futuros, 1997.

LA ROCQUE, EC.; WERLANG, S.R.; COELHO, F. **Risco de Mercado – Gestão de Risco de Mercado em Empresas Não - Financeiras.** 47f. Documento Preliminar, 2003.

LEHMER, D. H. **Mathematical methods in large scale computing units.** Annals Comp. Lab. Harvard, 1951.

LI, D. **Value at Risk based on the volatility, skewness and kurtosis** . Working paper, mar. 1999. Disponível em: <<http://www.gloriamundi.org>>

LOPEZ, J. Methods for evaluating Value-at-Risk. **FRBNY**, 1998.

MALETTA, B.V. **Modelos Baseados em Simulação de Monte Carlo: Soluções para o cálculo do Value-at-Risk**. 2005. 63. Dissertação (Mestrado) - Instituto COPPEAD de Administração, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2005.

MCKAY, M.D.; BECKMAN, R.J.; CONOVER, W.J. **A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code**. *Technometrics*, v. 21, n. 2, 1979.

METROPOLIS, N.; ULAM, S. **The Monte Carlo method**. *Journal of the American Statistical Association*, vol. 44, 1949.

OWEN, A.B. **A Central Limit Theorem for Latin Hypercube Sampling**. *Journal of Royal Statistical Society Ser. , B54*, 1992.

PAPAGEORGIU, A., PASKOV, S. **Deterministic simulation for risk management**. *Journal of Portfolio Management*, mai. 1999.

RISKGLOSSARY. Disponível em: <http://www.riskglossary.com> Acesso em: Janeiro, 2006.

RISKMETRICS GROUP. **CorporateMetrics™ - Technical Document**. Editado por *Morgan Guaranty Trust Company – Global Research*, Nova York, 1999.

_____. **RiskMetrics™ - Technical Document**. Terceira Edição, Editado por *Morgan Guaranty Trust Company – Global Research*, Nova York, 1995.

RISKSRV. Disponível em <http://www.risksrv.com> Acesso em janeiro, 2006.

SALIBY, E. **A reappraisal of some simulation fundamentals**. Tese (Doutorado) - University of Lancaster, 1980.

_____. **Descriptive Sampling: A better approach to Monte Carlo simulation.** Journal of Operational Research Society, v. 41, n. 12, 1990.

_____. **Repensando a Simulação.** São Paulo: Atlas, 1989.

SARNO, A.L. **Gerenciamento do Risco de Mercado para Produtores de Commodities no Brasil.** 2002. 70f. Dissertação (Mestrado Profissional em Administração) – Escola de administração de Empresas de São Paulo, Fundação Getúlio Vargas, São Paulo, 2002.

SECURATO, J.R.. **Valor em Risco de uma Empresa com Base em Dados Contábeis – Uma Introdução.** Faculdade de Economia e Administração – Universidade de São Paulo, São Paulo. 2002

SMITH, Jr., CLIFFORD W. **Corporate Risk Management: Theory and Practice.** The Journal of Derivatives – New York, Summer 1995.

STAUM, J. **Simulation in financial engineering.** Winter Simulation Conference, 2001.

STROOCK, D.W. **Probability Theory – An Analytical View,** Cambridge University Press, 1993 (rev. ed. 1994).

UHLENBECK, G.E.; ORNSTEIN, L.S. **On the Theory of Brownian Motion - Physical Review,** vol.36, September 1930. Reprinted in N. Wax, eds., **Selected Papers on Noise and Stochastic Processes,** Dover Pub., 1954.